

Plaquette 2 - Géométrie plane : droites, cercles et triangles

Géométrie du plan et de l'espace — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Droite $D : ax + by + c = 0$: vecteur normal $\vec{n}(a, b)$, vecteur directeur $(-b, a)$.

$$d(M, D) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- **Projeté orthogonal** : $H = M - \frac{ax_M + by_M + c}{a^2 + b^2} \vec{n}$; **symétrique** : $M' = 2H - M$.
- **Cercle** : $x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + c = 0$ a pour centre (x_0, y_0) et $R^2 = x_0^2 + y_0^2 - c$ (si > 0).
- **Tangente** en T au cercle de centre Ω : droite passant par T , de vecteur normal $\vec{\Omega T}$. Une droite est tangente $\Leftrightarrow d(\Omega, D) = R$.
- **Triangle** : centre du cercle circonscrit Ω (médiatrices), orthocentre H (hauteurs), centre de gravité G , et **droite d'Euler** : $\vec{\Omega H} = 3 \vec{\Omega G}$.
- **Barycentre** G de (A_i, α_i) : $\sum \alpha_i \vec{GA_i} = \vec{0}$; **Leibniz** : $\sum MA_i^2 = nMG^2 + \sum GA_i^2$ (isobarycentre).

Correction de l'exercice 1 - Distance d'un point à une droite et aire

a) $\vec{AB} = (6, 2)$, colinéaire à $(3, 1)$; un vecteur normal est $(1, -3)$: $x - 3y + c = 0$, et A donne $1 - 3 + c = 0$, $c = 2$.

— $(AB) : x - 3y + 2 = 0$. **Contrôle** avec B : $7 - 9 + 2 = 0$ ✓

b)

$$d(C, (AB)) = \frac{|3 - 18 + 2|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{13}{\sqrt{10}} \approx 4,11$$

c) $AB = \sqrt{36 + 4} = 2\sqrt{10}$, aire = $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} \times \frac{13}{\sqrt{10}} = 13$. Déterminant :

$$\frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{AC})| = \frac{1}{2} |6 \times 5 - 2 \times 2| = 13 \quad \checkmark$$

$$\text{d) } H = A + \frac{\vec{AC} \cdot \vec{AB}}{AB^2} \vec{AB} = (1, 1) + \frac{12 + 10}{40} (6, 2) = (4, 3; 2, 1).$$

— **Vérifications** : $\vec{CH} = (1, 3; -3, 9)$, $\vec{CH} \cdot \vec{AB} = 7,8 - 7,8 = 0$ ✓ et $CH = \sqrt{16,9} \approx 4,11$ ✓

Réponse. $(AB) : x - 3y + 2 = 0$; $d = \frac{13}{\sqrt{10}}$; aire 13 ; $H(4, 3; 2, 1)$.

Correction de l'exercice 2 - Reconnaître un cercle, tangente

a) On complète les carrés : $(x - 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 - 12 = 0$:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

— Cercle de centre $\Omega(2, -3)$ et de rayon 5.

b) $(5 - 2)^2 + (1 + 3)^2 = 9 + 16 = 25$ ✓ La tangente en P a pour vecteur normal $\vec{\Omega P} = (3, 4)$: $3(x - 5) + 4(y - 1) = 0$, soit $3x + 4y - 19 = 0$.

— **Contrôle** : $d(\Omega, T) = \frac{|6 - 12 - 19|}{5} = \frac{25}{5} = 5 = R \checkmark$

c) $x = 0$: $y^2 + 6y - 12 = 0$, $\Delta = 36 + 48 = 84$, $y = -3 \pm \sqrt{21}$. Deux points $(0, -3 \pm \sqrt{21})$.

d) $\Omega Q^2 = 16 + 25 = 41 > 25$: **extérieur** (puissance de Q : $41 - 25 = 16 > 0$).

Réponse. Centre $(2, -3)$, rayon 5 ; tangente $3x + 4y - 19 = 0$; $(0, -3 \pm \sqrt{21})$; Q extérieur.

Correction de l'exercice 3 - Droite et cercle : sécante ou tangente

a) $x^2 + (x + m)^2 = 25$, soit $2x^2 + 2mx + m^2 - 25 = 0$.

b) Discriminant réduit : $\Delta' = m^2 - 2(m^2 - 25) = 50 - m^2$.

— $|m| < 5\sqrt{2}$: deux points ; $|m| = 5\sqrt{2}$: tangente ; $|m| > 5\sqrt{2}$: aucun.

— Par la distance : $D_m : x - y + m = 0$, $d(O, D_m) = \frac{|m|}{\sqrt{2}}$, comparée à $R = 5$: même seuil $|m| = 5\sqrt{2} \checkmark$

c) $m = 1$: $2x^2 + 2x - 24 = 0$, soit $x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4) = 0$. Points $(3, 4)$ et $(-4, -3)$ (vérification : $9 + 16 = 25 \checkmark$).

— Corde : $\sqrt{7^2 + 7^2} = 7\sqrt{2}$.

d) $d = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et demi-corde ℓ :

$$\ell^2 = R^2 - d^2 = 25 - \frac{1}{2} = \frac{49}{2}, \quad 2\ell = 2 \times \frac{7}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2} \checkmark$$

Réponse. $\Delta' = 50 - m^2$: tangente pour $m = \pm 5\sqrt{2}$; $m = 1$: $(3, 4)$, $(-4, -3)$, corde $7\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 4 - Cercle circonscrit à un triangle

a) Médiatrice de $[AB]$: $x = 3$. Médiatrice de $[AC]$: passe par le milieu $(1, 2)$, de vecteur normal $\overrightarrow{AC} = (2, 4)$: $2(x - 1) + 4(y - 2) = 0$, soit $x + 2y = 5$.

b) $x = 3$ donne $y = 1$: $\Omega(3, 1)$, et $R^2 = \Omega A^2 = 9 + 1 = 10$, $R = \sqrt{10}$.

c) $\Omega B^2 = 9 + 1 = 10 \checkmark$, $\Omega C^2 = 1 + 9 = 10 \checkmark$

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 10$$

d) Un triangle est rectangle si et seulement si le centre du cercle circonscrit est le **milieu de l'hypoténuse**. Les milieux des côtés sont $(3, 0)$, $(4, 2)$, $(1, 2)$: aucun n'est Ω . Non rectangle.

— **Contrôle** : $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (-2)(4) + (-4)(-4) = 8$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 24$: aucun n'est nul $\checkmark$ (et tous positifs : triangle **acutangle**, ce qui place Ω à l'intérieur).

Réponse. $\Omega(3, 1)$, $R = \sqrt{10}$; $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 10$; triangle acutangle, non rectangle.

Correction de l'exercice 5 - Bissectrices de deux droites

a) $y = 0$: $3x = 12$, $I(4, 0)$.

b) $d(M, D_1) = \frac{|3x + 4y - 12|}{5}$ et $d(M, D_2) = |y|$: égalité
 $\Leftrightarrow |3x + 4y - 12| = 5|y| \Leftrightarrow 3x + 4y - 12 = \pm 5y$.

c) Signe + : $3x - y - 12 = 0$; signe - : $3x + 9y - 12 = 0$, soit $x + 3y - 4 = 0$.

— En $I(4, 0)$: $12 - 0 - 12 = 0 \checkmark$ et $4 + 0 - 4 = 0 \checkmark$

— Normales $(3, -1)$ et $(1, 3)$: produit scalaire $3 - 3 = 0$: **perpendiculaires**.

$$B_1 : 3x - y - 12 = 0, \quad B_2 : x + 3y - 4 = 0$$

d) Le triangle a pour sommets O , $I(4, 0)$ et $(0, 3)$; c'est le triangle 3-4-5, de cercle inscrit de centre $(1, 1)$ (rayon $\frac{3+4-5}{2} = 1$). $(1, 1)$ vérifie $1 + 3 - 4 = 0$: c'est B_2 , la bissectrice **intérieure** en I .

Réponse. $I(4, 0)$; bissectrices $3x - y - 12 = 0$ et $x + 3y - 4 = 0$ (perpendiculaires) ; la seconde contient $(1, 1)$.

Correction de l'exercice 6 - Barycentre et fonction de Leibniz

a) $G = \left(\frac{0+4+1}{3}, \frac{0+0+3}{3} \right) = \left(\frac{5}{3}, 1 \right)$.

b) $MA^2 = MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + GA^2$, et de même pour B, C . En sommant, le terme croisé vaut $2\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 0$ (définition de G) :

$$f(M) = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

c) $GA^2 = \frac{25}{9} + 1 = \frac{34}{9}$, $GB^2 = \frac{49}{9} + 1 = \frac{58}{9}$, $GC^2 = \frac{4}{9} + 4 = \frac{40}{9}$, somme $\frac{132}{9} = \frac{44}{3}$.

— Minimum $\frac{44}{3}$, atteint **uniquement** en $M = G$.

d) $3MG^2 = 20 - \frac{44}{3} = \frac{16}{3}$, $MG^2 = \frac{16}{9}$: le **cercle** de centre G et de rayon $\frac{4}{3}$.

— **Contrôle** : $M = G + \left(\frac{4}{3}, 0 \right) = (3, 1)$: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 10 + 2 + 8 = 20$ ✓

Réponse. $G(\frac{5}{3}, 1)$; $\min f = \frac{44}{3}$ en G ; $f(M) = 20$: cercle de centre G , rayon $\frac{4}{3}$.

Correction de l'exercice 7 - Le cercle d'Apollonius

a) Les distances sont positives : $MA = 2MB \Leftrightarrow MA^2 = 4MB^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4((x-3)^2 + y^2)$.

b) $x^2 + y^2 = 4x^2 - 24x + 36 + 4y^2$, soit $3x^2 + 3y^2 - 24x + 36 = 0$:

$$x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 = 4$$

— Cercle de centre $(4, 0)$ et de rayon 2.

c) $y = 0$: $x = 2$ ou $x = 6$. Pour $(2, 0)$: $MA = 2$, $MB = 1$ ✓ ; pour $(6, 0)$: $MA = 6$, $MB = 3$ ✓

d) $I = (2, 0)$ vérifie $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = (-2, 0) + 2(1, 0) = \vec{0}$: barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$. $J = (6, 0)$: $\overrightarrow{JA} - 2\overrightarrow{JB} = (-6, 0) - 2(-3, 0) = \vec{0}$: barycentre de $(A, 1)$, $(B, -2)$.

— $[IJ]$ est un **diamètre** de Γ (milieu $(4, 0)$, longueur 4) ✓

Réponse. $\Gamma : (x-4)^2 + y^2 = 4$; points $(2, 0)$ et $(6, 0)$, barycentres de $(A, 1)$, $(B, \pm 2)$.

Correction de l'exercice 8 - Projection et réflexion par rapport à une droite

a) $\vec{n} = (1, 2)$, $\|\vec{n}\|^2 = 5$, et $x_M + 2y_M - 4 = 7$:

$$H = M - \frac{7}{5}\vec{n} = \left(3 - \frac{7}{5}, 4 - \frac{14}{5} \right) = \left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5} \right)$$

— **Contrôle** : $\frac{8}{5} + \frac{12}{5} - 4 = 0$ ✓

b) $M' = 2H - M = \left(\frac{1}{5}, -\frac{8}{5} \right)$. Le milieu de $[MM']$ est $H \in D$, et $\overrightarrow{MM'} = \left(-\frac{14}{5}, -\frac{28}{5} \right)$ est colinéaire à $\vec{n}$: D est la médiatrice ✓

c) $s(\vec{v}) = \vec{v} - 2 \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$, donc $S = I_2 - \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$.

$$- S^2 = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 9+16 & -12+12 \\ -12+12 & 16+9 \end{pmatrix} = I_2 \quad \checkmark$$

d) $\text{tr}S = 0$, $\det S = \frac{-9-16}{25} = -1$: une réflexion **renverse l'orientation** ; valeurs 1 (sur l'axe) et -1 (sur la normale), de somme 0.

Réponse. $H(\frac{8}{5}, \frac{6}{5})$, $M(\frac{1}{5}, -\frac{8}{5})$; $S = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$, $\det S = -1$.

Correction de l'exercice 9 - Angle de deux droites

a) $2x + 1 = -3x + 4$, $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{11}{5}$: $I(\frac{3}{5}, \frac{11}{5})$.

b) Vecteurs directeurs $(1, 2)$ et $(1, -3)$:

$$\cos \theta = \frac{|1-6|}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

c) $\tan \theta = \left| \frac{2+3}{1-6} \right| = 1 \quad \checkmark$ (formule issue de $\tan(\alpha_1 - \alpha_2)$ avec $\tan \alpha_i = m_i$).

d) Pente $-\frac{1}{2}$: $y - \frac{11}{5} = -\frac{1}{2}(x - \frac{3}{5})$, soit $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ (car $\frac{11}{5} + \frac{3}{10} = \frac{25}{10}$).

— **Contrôle** : $(1, -\frac{1}{2}) \cdot (1, 2) = 0 \quad \checkmark$ et $-\frac{3}{10} + \frac{5}{2} = \frac{22}{10} = \frac{11}{5} \quad \checkmark$

Réponse. $I(\frac{3}{5}, \frac{11}{5})$; angle $\frac{\pi}{4}$; perpendiculaire : $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Correction de l'exercice 10 - Tangentes issues d'un point extérieur

a) $OP^2 = 10 > 5$: extérieur.

b) $\overrightarrow{OT} \cdot (\overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OP}) = 0 \Leftrightarrow OT^2 = \overrightarrow{OT} \cdot \overrightarrow{OP} \Leftrightarrow 5 = 3x + y$.

c) $y = 5 - 3x$ dans $x^2 + y^2 = 5$: $10x^2 - 30x + 20 = 0$, $x^2 - 3x + 2 = 0$, $x \in \{1, 2\}$.

— $T_1(1, 2)$ et $T_2(2, -1)$. Tangentes (normale $\overrightarrow{OT}$) : $x + 2y = 5$ et $2x - y = 5$.

— **Contrôle** : P vérifie $3 + 2 = 5 \quad \checkmark$ et $6 - 1 = 5 \quad \checkmark$

d) $PT_1 = \|(-2, 1)\| = \sqrt{5}$; par Pythagore dans OPT_1 rectangle en T_1 :

$$PT^2 = OP^2 - R^2 = 10 - 5 = 5$$

— Normales $(1, 2)$ et $(2, -1)$ orthogonales : les tangentes sont **perpendiculaires** (OT_1PT_2 est un carré de côté $\sqrt{5}$).

Réponse. $T_1(1, 2)$, $T_2(2, -1)$; tangentes $x + 2y = 5$ et $2x - y = 5$; $PT = \sqrt{5}$, angle droit.

Correction de l'exercice 11 - Puissance d'un point et axe radical

a) $p_1(M) = x^2 + y^2 - 4$ et $p_2(M) = (x - 3)^2 + y^2 - 1 = x^2 + y^2 - 6x + 8$.

b) $p_1 = p_2 \Leftrightarrow -4 = -6x + 8 \Leftrightarrow x = 2$: la droite verticale $x = 2$.

c) $x = 2$ dans C_1 : $y^2 = 0$. Un seul point commun $(2, 0)$: les cercles sont **tangents extérieurement** (distance des centres $3 = 2 + 1$). L'axe radical est leur **tangente commune** en ce point.

d) La longueur de la tangente issue de M vérifie (Pythagore)

$$MT^2 = M\Omega^2 - R^2 = p(M)$$

— Sur l'axe radical, $p_1(M) = p_2(M)$: les deux longueurs sont égales. Exemple $M(2, 3)$: $p_1 = 4 + 9 - 4 = 9$, $p_2 = 1 + 9 - 1 = 9$: tangentes de longueur 3 $\checkmark$

Réponse. Axe radical $x = 2$; cercles tangents en $(2, 0)$; $MT^2 = p(M)$, égal pour les deux

cercles.

Correction de l'exercice 12 - Paramétrage rationnel du cercle

a) $y = t(x + 1)$ dans $x^2 + y^2 = 1$: $(1 + t^2)x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 = 0$. Une racine est $x = -1$ (point A) ; le produit des racines vaut $\frac{t^2 - 1}{1 + t^2}$, donc l'autre est

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = t(x + 1) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

b) $t = \frac{1}{2} : \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$; $t = \frac{2}{3} : \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$; $t = \frac{1}{4} : \left(\frac{15}{17}, \frac{8}{17}\right)$.

c) En chassant les dénominateurs : $3^2 + 4^2 = 5^2$, $5^2 + 12^2 = 13^2$, $15^2 + 8^2 = 17^2$ ($225 + 64 = 289$ ✓). Pour $t = \frac{p}{q} : (q^2 - p^2)^2 + (2pq)^2 = (q^2 + p^2)^2$.

d) L'angle inscrit $\widehat{OAM_t}$ intercepte le même arc que l'angle au centre θ : il vaut $\frac{\theta}{2}$, et la pente de (AM_t) est $\tan \frac{\theta}{2}$. On retrouve $\cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $\sin \theta = \frac{2t}{1 + t^2}$.

Réponse. $M_t = \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2}\right)$; triplets (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17) ; $t = \tan \frac{\theta}{2}$.

Correction de l'exercice 13 - Cercle inscrit dans le triangle 3-4-5

a) $a = BC = \sqrt{16 + 9} = 5$, $b = CA = 3$, $c = AB = 4$.

b)

$$I = \frac{5(0, 0) + 3(4, 0) + 4(0, 3)}{12} = \frac{(12, 12)}{12} = (1, 1)$$

c) Distances de I à (AB) : $y = 0$ et à (AC) : $x = 0$: 1 et 1. À (BC) : $3x + 4y - 12 = 0$: $\frac{|3 + 4 - 12|}{5} = 1$ ✓ Donc $r = 1$.

d) Aire = $\frac{3 \times 4}{2} = 6$, demi-périmètre 6 : $r = \frac{6}{6} = 1$ ✓

— **Pour un triangle rectangle**, $r = \frac{b + c - a}{2}$ (côtés de l'angle droit moins l'hypoténuse) : $\frac{3 + 4 - 5}{2} = 1$ ✓

Réponse. $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$; $I(1, 1)$, $r = 1$.

Correction de l'exercice 14 - Rotation de centre quelconque

a) $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: si $\overrightarrow{\Omega M} = (u, v)$, alors $\overrightarrow{\Omega M'} = (-v, u)$.

b) $\overrightarrow{\Omega M} = (3, 1)$, $\overrightarrow{\Omega M'} = (-1, 3)$, $M' = (0, 5)$.

— $\|(3, 1)\| = \|(-1, 3)\| = \sqrt{10}$ ✓ et $(3, 1) \cdot (-1, 3) = 0$ ✓

c) La droite $y = 2$ passe par Ω avec la direction $(1, 0)$; son image passe par $\rho(\Omega) = \Omega$ avec la direction $R(1, 0) = (0, 1)$: c'est la droite $x = 1$.

d) $R^2 = -I_2$:

$$\rho \circ \rho(M) = \Omega - \overrightarrow{\Omega M} = 2\Omega - M$$

— C'est la **symétrie centrale** de centre Ω . $\rho \circ \rho(M) = (2 - 4, 4 - 3) = (-2, 1)$, et directement $\rho(M') : \overrightarrow{\Omega M'} = (-1, 3) \mapsto (-3, -1)$, point $(-2, 1)$ ✓

Réponse. $M'(0, 5)$; image de $y = 2$: $x = 1$; ρ^2 = symétrie de centre Ω , $\rho^2(M) = (-2, 1)$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : droite d'Euler et cercle des neuf points

a) Médiatrice de $[AB]$: $x = 4$. Médiatrice de $[AC]$: milieu $(1, 3)$, normale $(2, 6)$:
 $x + 3y = 10$, d'où $y = 2$. $\Omega(4, 2)$, $R^2 = 16 + 4 = 20$ (contrôle $\Omega C^2 = 4 + 16 = 20$ ✓).

b) Hauteur issue de C : $x = 2$ ((AB) horizontale). Hauteur issue de A , orthogonale à $\overrightarrow{BC} = (-6, 6)$: $y = x$. Donc $H(2, 2)$; contrôle : $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = (-6)(2) + (2)(6) = 0$ ✓ $G = \left(\frac{10}{3}, 2\right)$.

c) $\overrightarrow{\Omega H} = (-2, 0)$ et $3\overrightarrow{\Omega G} = 3\left(-\frac{2}{3}, 0\right) = (-2, 0)$ ✓

$$\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}$$

— Ω, G, H sont **alignés** (ici sur la droite $y = 2$) : c'est la droite d'Euler.

d) $N = (3, 2)$, $\frac{R}{2} = \sqrt{5}$. Milieux : $(4, 0)$, $(5, 3)$, $(1, 3)$; pied de la hauteur : $(2, 0)$. Carrés des distances à N : $1 + 4$, $4 + 1$, $4 + 1$, $1 + 4$: tous égaux à 5 ✓

— Ce cercle (cercle d'Euler) passe aussi par les deux autres pieds de hauteurs et les milieux de $[AH]$, $[BH]$, $[CH]$: neuf points.

Réponse. $\Omega(4, 2)$, $R = 2\sqrt{5}$; $H(2, 2)$, $G(\frac{10}{3}, 2)$; $\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}$; cercle d'Euler de centre $(3, 2)$, rayon $\sqrt{5}$.