

Plaquette 1 – Produit scalaire, produit vectoriel, droites et plans

Géométrie du plan et de l'espace — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$.

- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- **Norme** : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$; **Cauchy-Schwarz** : $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$.
- **Projection** de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$: $\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}$.

Produit vectoriel : $\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx')$.

- **Orthogonal** aux deux vecteurs ; $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin \theta|$ est l'**aire** du parallélogramme.
- **Antisymétrique** : $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$; nul $\Leftrightarrow$ vecteurs colinéaires.

Produit mixte : $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ — c'est le **volume orienté** du parallélépipède ; nul $\Leftrightarrow$ vecteurs **coplanaires**.

Droites et plans.

- **Plan** : équation $ax + by + cz + d = 0$, de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$; ou paramétrage $A + s\vec{u} + t\vec{v}$.
- **Droite** : paramétrage $A + t\vec{u}$, ou intersection de deux plans.
- **Distance d'un point à un plan** :

$$d(M, P) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- **Distance d'un point à une droite** $(A, \vec{u})$: $d = \frac{|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}|}{\|\vec{u}\|}$.
- **Positions relatives** : deux plans sont parallèles si leurs normales sont colinéaires ; une droite est parallèle à un plan si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.

Correction de l'exercice 1 – Produit scalaire et angle

- **Produit scalaire** : $2 - 2 + 4 = 4$.
- **Normes** : $\|\vec{u}\| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$.
- **Cosinus de l'angle** :

$$\cos \theta = \frac{4}{9} \approx 0,4444$$

- **Angle** : $\theta = \arccos \frac{4}{9} \approx 1,1102$ rad, soit environ $63,6^\circ$.
- **Contrôle de Cauchy-Schwarz** : $|4| \leq 3 \times 3 = 9$ ✓
- **Interprétation** : les vecteurs ne sont ni orthogonaux ($\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$) ni colinéaires ($\cos \theta \neq \pm 1$).
- **Remarque** : les deux vecteurs sont de même norme 3 — ce sont des vecteurs à coordonnées entières de norme entière, cas rare et pratique pour les exercices.

Réponse. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$, normes 3 et 3, angle $\approx 63,6^\circ$.

Correction de l'exercice 2 - Orthogonalité

— **Condition** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

$$3 - m + 2m = 3 + m = 0$$

— Donc $m = -3$.

— **Vérification** : $\vec{u}(1, -3, 2)$ et $\vec{v}(3, -1, -3)$ donnent $3 + 3 - 6 = 0$ ✓

— **Normes** : $\|\vec{u}\| = \sqrt{14}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{19}$ — les vecteurs sont bien non nuls, l'orthogonalité est stricte.

— **Remarque** : l'équation était **linéaire** en m ici, mais elle est souvent quadratique — il peut alors y avoir deux valeurs, ou aucune.

— **Généralisation** : dans $\mathbb{R}^3$, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à un vecteur non nul fixé est un **plan** (dimension 2).

Réponse. $m = -3$.

Correction de l'exercice 3 - Produit vectoriel

— **Formule** :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (0 \times 3 - 2 \times 1, 2 \times 0 - 1 \times 3, 1 \times 1 - 0 \times 0) = (-2, -3, 1)$$

— **Contrôles d'orthogonalité** : $(-2) \times 1 + (-3) \times 0 + 1 \times 2 = 0$ ✓ et $0 - 3 + 3 = 0$ ✓

— **Aire du parallélogramme** :

$$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14} \approx 3,742$$

— **Contrôle par les normes** : $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{10}$, produit $\sqrt{50} \approx 7,07$ — l'aire est inférieure ✓ (les vecteurs ne sont pas orthogonaux).

— **Aire du triangle** : la moitié, soit $\frac{\sqrt{14}}{2} \approx 1,871$.

— **Attention à l'ordre** : $\vec{v} \wedge \vec{u} = (2, 3, -1)$ — le produit vectoriel est **antisymétrique**.

Réponse. $\vec{u} \wedge \vec{v} = (-2, -3, 1)$, aire $\sqrt{14} \approx 3,74$.

Correction de l'exercice 4 - Produit mixte et coplanarité

— **Critère** : ils sont coplanaires si et seulement si leur **produit mixte** (déterminant) est nul.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

— **Développement** : $1(7 - 5) - 2(14 - 15) + 4(2 - 3) = 2 + 2 - 4 = 0$.

— **Conclusion** : les trois vecteurs sont **coplanaires**.

— **Relation explicite** : $2 \times (1, 2, 3) + (2, 1, 1) = (4, 5, 7)$ ✓ — le troisième est combinaison des deux premiers.

— **Interprétation géométrique** : le parallélépipède construit sur ces vecteurs a un **volume nul** — il est aplati.

— **Plan commun** : de vecteur normal

$$(1, 2, 3) \wedge (2, 1, 1) = (2 - 3, 6 - 1, 1 - 4) = (-1, 5, -3), \text{ soit le plan } -x + 5y - 3z = 0.$$

$$\text{Contrôle : } -1 + 10 - 9 = 0 \text{ ✓, } -2 + 5 - 3 = 0 \text{ ✓, } -4 + 25 - 21 = 0 \text{ ✓}$$

Réponse. Oui : produit mixte nul, et $(4, 5, 7) = 2(1, 2, 3) + (2, 1, 1)$.

Correction de l'exercice 5 - Équation d'un plan

- **Vecteur normal** : $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = (1 \times 1 - 0 \times 1, 0 \times 0 - 1 \times 1, 1 \times 1 - 1 \times 0) = (1, -1, 1)$.
- **Équation** : $x - y + z + d = 0$; le passage par A donne $1 - 0 + 2 + d = 0$, donc $d = -3$.
 $P : x - y + z - 3 = 0$
- **Vérifications** : $A \checkmark$; les directeurs doivent être orthogonaux à $\vec{n}$: $1 - 1 + 0 = 0 \checkmark$ et $0 - 1 + 1 = 0 \checkmark$
- **Autre point du plan** : $A + \vec{u} = (2, 1, 2)$, et $2 - 1 + 2 - 3 = 0 \checkmark$
- **Méthode alternative (sans produit vectoriel)** : écrire que $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$ — le développement donne directement l'équation.
- **Cohérence dimensionnelle** : une équation dans $\mathbb{R}^3$ définit bien un objet de dimension 2 $\checkmark$

Réponse. $x - y + z - 3 = 0$.

Correction de l'exercice 6 - Distance d'un point à un plan

- **Formule** :

$$d(M, P) = \frac{|2 \times 3 - 1 + 2 \times (-2) - 4|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|6 - 1 - 4 - 4|}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

- **Distance** : 1.
- **Vérification par le projeté** : $\vec{n} = (2, -1, 2)$, de norme 3. Le projeté est $H = M - \frac{-3}{9}\vec{n} = M + \frac{1}{3}(2, -1, 2) = \left(\frac{11}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.
- **Contrôle** : H est dans le plan, $\frac{22}{3} - \frac{2}{3} - \frac{8}{3} - 4 = \frac{22 - 2 - 8 - 12}{3} = 0 \checkmark$
- **Contrôle de la distance** : $\|\overrightarrow{MH}\| = \frac{1}{3}\|(2, -1, 2)\| = \frac{3}{3} = 1 \checkmark$
- **Point de méthode** : la valeur **absolue** est indispensable ; le signe de $ax_M + by_M + cz_M + d$ indique de **quel côté** du plan se trouve M .

Réponse. $d(M, P) = 1$.

Correction de l'exercice 7 - Distance d'un point à une droite

- **Formule** : $d = \frac{|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}|}{\|\vec{u}\|}$.
- $\overrightarrow{AM} = (1, 1, 1)$ et $\vec{u} = (1, 1, 0)$.
- **Produit vectoriel** : $(1 \times 0 - 1 \times 1, 1 \times 1 - 1 \times 0, 1 \times 1 - 1 \times 1) = (-1, 1, 0)$.
- **Normes** : $|(-1, 1, 0)| = \sqrt{2}$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$.
- **Distance** : $d = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$.
- **Vérification par projection** : le projeté de M sur la droite est $\frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = \frac{2}{2}(1, 1, 0) = (1, 1, 0)$.
- **Contrôle** : $\overrightarrow{HM} = (0, 0, 1)$, de norme 1 $\checkmark$ et orthogonal à $\vec{u}$ ($0 + 0 + 0 = 0$) $\checkmark$
- **Lecture** : la droite est la première bissectrice du plan Oxy ; M est à la hauteur 1 au-dessus de son projeté.

Réponse. $d(M, D) = 1$.

Correction de l'exercice 8 - Intersection de deux plans

- **Normales** : $(1, 1, 1)$ et $(1, -1, 1)$, **non colinéaires** — les plans sont **sécants** selon une droite.
- **Soustraction** : $2y = -2$, donc $y = -1$.
- **Report** : $x - 1 + z = 1$, donc $x + z = 2$, soit $x = 2 - z$.
- **Paramétrage** avec $z = t$:

$$(x, y, z) = (2 - t, -1, t) = (2, -1, 0) + t(-1, 0, 1)$$

- **Vérifications** : $(2, -1, 0)$ donne $2 - 1 + 0 = 1$ ✓ et $2 + 1 + 0 = 3$ ✓
- **Vecteur directeur** : il doit être orthogonal aux **deux normales** : $-1 + 0 + 1 = 0$ ✓ et $-1 - 0 + 1 = 0$ ✓
- **Contrôle par produit vectoriel** :
 $(1, 1, 1) \wedge (1, -1, 1) = (1 + 1, 1 - 1, -1 - 1) = (2, 0, -2)$, colinéaire à $(-1, 0, 1)$ ✓

Réponse. Droite $(2, -1, 0) + t(-1, 0, 1)$.

Correction de l'exercice 9 - Droite et plan

- **Test de parallélisme** : $\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times (-3) = 1 + 2 - 3 = 0$.
- La droite est donc **parallèle** au plan ! Reste à savoir si elle y est **contenue**.
- **Test d'un point** : $A(1, 0, 0)$ donne $1 + 0 - 0 = 1 \neq 2$ — A n'est pas dans le plan.
- **Conclusion** : la droite est **strictement parallèle** au plan ; il n'y a **aucun point d'intersection**.
- **Confirmation par le calcul** : en substituant le paramétrage, $(1 + t) + 2t - 3t = 1 \neq 2$ pour tout t — l'équation est **impossible** ✓
- **Distance** : $d = \frac{|1 - 2|}{\sqrt{1 + 1 + 9}} = \frac{1}{\sqrt{11}} \approx 0,302$ — constante le long de la droite.
- **Méthode systématique** : tester d'abord $\vec{u} \cdot \vec{n}$; si non nul, il y a un point unique ; si nul, tester un point de la droite.

Réponse. Non : droite strictement parallèle, à distance $\frac{1}{\sqrt{11}}$.

Correction de l'exercice 10 - Plan médiateur

- **Définition** : le plan médiateur est l'ensemble des points **équidistants** de A et B ; il passe par le **milieu** et est orthogonal à $\overline{AB}$.
- **Milieu** : $I(2, 1, 2)$.
- **Vecteur normal** : $\overline{AB} = (2, -2, -2)$, que l'on simplifie en $(1, -1, -1)$.
- **Équation** : $x - y - z + d = 0$, avec I : $2 - 1 - 2 + d = 0$, donc $d = 1$.

$$P : x - y - z + 1 = 0$$

- **Vérification par les distances** : pour A , $\frac{|1 - 2 - 3 + 1|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$; pour B ,
 $\frac{|3 - 0 - 1 + 1|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ ✓ — équidistants.
- **Contrôle direct** : $AB = \|(2, -2, -2)\| = 2\sqrt{3}$, et chaque point est à $\sqrt{3}$ du plan, soit la moitié ✓
- **Analogie** : c'est l'équivalent spatial de la **médiatrice** d'un segment dans le plan.

Réponse. $x - y - z + 1 = 0$.

Correction de l'exercice 11 - Aire d'un triangle

— **Vecteurs** : $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$.

— **Produit vectoriel** :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (1 \times 1 - 0 \times 0, 0 \times (-1) - (-1) \times 1, 0 - (-1)) = (1, 1, 1)$$

— **Aire du triangle** : la **moitié** de la norme,

$$A = \frac{|(1, 1, 1)|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$$

— **Contrôle** : le triangle est **équilatéral** de côté $\sqrt{2}$ (toutes les distances entre sommets valent $\sqrt{2}$). Son aire vaut $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \checkmark$

— **Plan du triangle** : de normale $(1, 1, 1)$, c'est $x + y + z = 1$ — le plan qui coupe les axes aux trois points unités.

— **Remarque** : ce triangle est une face du **tétraèdre régulier** inscrit dans le cube unité.

Réponse. $A = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$.

Correction de l'exercice 12 - Volume d'un tétraèdre

— **Formule** : le volume du tétraèdre est le **sixième** du produit mixte,

$$V = \frac{1}{6} |\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})|$$

— **Déterminant** : la matrice est $\text{diag}(2, 3, 4)$, de déterminant 24.

— **Volume** : $V = \frac{24}{6} = 4$.

— **Contrôle par la formule élémentaire** : base OAB (triangle rectangle d'aire $\frac{2 \times 3}{2} = 3$), hauteur $OC = 4$, donc

$$V = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{3} = \frac{3 \times 4}{3} = 4$$

— $\checkmark$

— **Origine du facteur $\frac{1}{6}$** : le parallélépipède a un volume 24 ; le prisme en est la moitié, et le tétraèdre le tiers du prisme.

— **Plan ABC** : $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$, soit $6x + 4y + 3z = 12$.

Réponse. $V = 4$.

Correction de l'exercice 13 - Angle de deux plans et droite d'intersection

a) $\vec{n}_1 = (1, 2, 2)$ et $\vec{n}_2 = (2, -1, 2)$ ne sont pas colinéaires : plans sécants. Avec $\|\vec{n}_1\| = \|\vec{n}_2\| = 3$:

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|} = \frac{|2 - 2 + 4|}{9} = \frac{4}{9}, \quad \theta \approx 63,6^\circ$$

b) Δ est orthogonale aux deux normales :

$$\vec{d} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = (2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1), 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2, 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2) = (6, 2, -5).$$

— **Contrôle** : $\vec{n}_1 \cdot \vec{d} = 6 + 4 - 10 = 0 \checkmark$ et $\vec{n}_2 \cdot \vec{d} = 12 - 2 - 10 = 0 \checkmark$

c) $z = 0$: $x + 2y = 3$ et $2x - y = 1$, d'où $x = 1, y = 1$. $A(1, 1, 0)$ ($1 + 2 = 3 \checkmark, 2 - 1 = 1 \checkmark$) et $\Delta : (x, y, z) = (1 + 6t, 1 + 2t, -5t), t \in \mathbb{R}$.

d) Formule de la distance à une droite : $\overrightarrow{AO} \wedge \vec{d}$ a la même norme que $\overrightarrow{OA} \wedge \vec{d} = (1 \cdot (-5) - 0, 0 - 1 \cdot (-5), 2 - 6) = (-5, 5, -4)$, de norme $\sqrt{66}$.

— $d(O, \Delta) = \frac{\sqrt{66}}{\sqrt{65}} \approx 1,008$. **Contrôle** : c'est moins que $\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{2} \approx 1,414$, cohérent puisque A n'est pas le pied de la perpendiculaire issue de O .

Réponse. $\cos \theta = \frac{4}{9}$ ($\theta \approx 63,6^\circ$) ; $\Delta : (1 + 6t, 1 + 2t, -5t)$; $d(O, \Delta) = \sqrt{66/65}$.

Correction de l'exercice 14 - Distance de deux droites non coplanaires

a) $\vec{u} \wedge \vec{v} = (0 \cdot 1 - 0 \cdot 1, 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = (0, -1, 1)$ et $\overrightarrow{OB} = (0, 2, 1)$:

$$[\overrightarrow{OB}, \vec{u}, \vec{v}] = \overrightarrow{OB} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0 - 2 + 1 = -1 \neq 0$$

— Les droites ne sont pas coplanaires (ni parallèles, ni sécantes).

b) $d = \frac{|-1|}{\|(0, -1, 1)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$.

c) $P = (t, 0, 0)$, $Q = (0, 2 + s, 1 + s)$, $\overrightarrow{PQ} = (-t, 2 + s, 1 + s)$.

— $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = -t = 0$; $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = (2 + s) + (1 + s) = 0$, d'où $s = -\frac{3}{2}$.

— $P = O$ et $Q = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

d) $PQ = \sqrt{0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ✓ Et $\overrightarrow{PQ} = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ est colinéaire à $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ✓ (c'est la direction de la perpendiculaire commune).

Réponse. Non coplanaires (produit mixte -1) ; $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $P = O$, $Q = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : projeté et symétrique

— **Normale** : $\vec{n} = (1, 1, 1)$, de norme $\sqrt{3}$.

— **Distance** : $d = \frac{|0 + 0 + 0 - 3|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \approx 1,732$.

— **Projeté** : on se déplace depuis M le long de $\vec{n}$. On cherche t tel que $M + t\vec{n} \in P$:

$$3t = 3 \implies t = 1$$

— Donc $H = (1, 1, 1)$.

— **Contrôle** : $1 + 1 + 1 = 3$ ✓ et $\|\overrightarrow{MH}\| = \sqrt{3}$ ✓ — conforme à la distance.

— **Symétrique** : $M' = M + 2t\vec{n} = (2, 2, 2)$.

— **Vérification** : H est le milieu de $[MM']$ ✓ ; et la distance de M' au plan vaut $\frac{|6 - 3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ — même distance, de l'autre côté ✓

— **Formule générale** : $H = M - \frac{ax_M + by_M + cz_M + d}{a^2 + b^2 + c^2} \vec{n}$, et $M' = 2H - M$.

Réponse. $H(1, 1, 1)$ et $M'(2, 2, 2)$, avec $d = \sqrt{3}$.