

Plaquette 4 - Produit vectoriel et produit mixte : aires, volumes, identités

Géométrie du plan et de l'espace — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition (base orthonormée directe) :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

— Bilinéaire, **antisymétrique** ; $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ colinéaires ; $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3$ (et permutations circulaires).

— $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin \theta|$ = aire du parallélogramme.

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \quad (\text{Lagrange})$$

— **Double produit** : $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$.

— **Produit mixte** : $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$; volume du tétraèdre : $\frac{1}{6} |[\cdot]|$.

Correction de l'exercice 1 - Règles de calcul du produit vectoriel

a) $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = (0, 0, 1) = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2$, et par antisymétrie $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$.

b) Les termes $\vec{e}_i \wedge \vec{e}_i$ sont nuls ; il reste six termes, regroupés deux à deux :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{e}_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{e}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{e}_3$$

c) Le déterminant de colonnes $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ développé selon la troisième colonne vaut $w_1(u_2v_3 - u_3v_2) - w_2(u_1v_3 - u_3v_1) + w_3(u_1v_2 - u_2v_1)$, c'est-à-dire $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

d) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u} = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}) = 0$ (deux colonnes égales), de même pour $\vec{v}$.

— $(1, 2, 3) \wedge (2, 4, 6) = (12 - 12, 6 - 6, 4 - 4) = \vec{0}$: vecteurs colinéaires ($\vec{v} = 2\vec{u}$).

Réponse. $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3$ (circulaire) ; $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$; $(1, 2, 3) \wedge (2, 4, 6) = \vec{0}$.

Correction de l'exercice 2 - Identité de Lagrange

a) $\vec{u} \wedge \vec{v} = (12 - 15, 12 - 6, 5 - 8) = (-3, 6, -3)$, de carré de norme 54 ;

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 + 10 + 18 = 32 ; \|\vec{u}\|^2 = 14, \|\vec{v}\|^2 = 77.$$

$$54 + 32^2 = 54 + 1024 = 1078 = 14 \times 77 \quad \checkmark$$

b) Avec $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$: $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \sin^2 \theta$.

c) $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \leq \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$, avec égalité $\Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow$ vecteurs colinéaires.

d) Aire = $\sqrt{54} = 3\sqrt{6} \approx 7,35$; $\sin \theta = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{1078}} \approx 0,224$ (angle $\approx 12,9^\circ$: vecteurs presque colinéaires, d'où une aire faible devant $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \approx 32,8$).

Réponse. $54 + 1024 = 1078 = 14 \times 77$; aire $3\sqrt{6}$; $\sin \theta \approx 0,224$.

Correction de l'exercice 3 - Double produit vectoriel

a) $\vec{v} \wedge \vec{w} = (0 \cdot 2 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 0 - 1 \cdot 2, 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = (-1, -2, 1)$, puis

$$\vec{u} \wedge (-1, -2, 1) = (1 \cdot 1 - 0, 0 - 1 \cdot 1, -2 + 1) = (1, -1, -1).$$

b) $\vec{u} \cdot \vec{w} = 1$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$: $\vec{v} - \vec{w} = (1, -1, -1) \quad \checkmark$

c) $\vec{u} \wedge \vec{v} = (1, -1, -1)$ et $(1, -1, -1) \wedge (0, 1, 2) = (-2 + 1, 0 - 2, 1 - 0) = (-1, -2, 1)$.

— $(-1, -2, 1) \neq (1, -1, -1)$: le produit vectoriel **n'est pas associatif**. (Formule : $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} = \vec{v} - 2\vec{u} \checkmark$)

d) En appliquant b) aux trois termes :

$$[(\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}] + [(\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{w} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}] + [(\vec{w} \cdot \vec{v})\vec{u} - (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v}] = \vec{0}$$

— Les six termes s'annulent deux à deux (symétrie du produit scalaire).

Réponse. $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (1, -1, -1) = \vec{v} - \vec{w}$; $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (-1, -2, 1)$: non associatif.

Correction de l'exercice 4 - Aire, hauteur et angle d'un triangle de l'espace

a) $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 3)$:

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (2 \cdot 3 - 1 \cdot 1, 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 3, 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1)) = (5, -4, 3)$$

— Norme $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$: aire = $\frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3,54$.

b) $h_C = \frac{2 \times \text{aire}}{AB} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \approx 2,89$.

c) $\cos \hat{BAC} = \frac{-1+2+3}{\sqrt{6}\sqrt{11}} = \frac{4}{\sqrt{66}}$, $\sin \hat{BAC} = \sqrt{1 - \frac{16}{66}} = \sqrt{\frac{50}{66}}$.

— $AB \cdot AC \cdot \sin = \sqrt{6}\sqrt{11}\sqrt{\frac{50}{66}} = \sqrt{50} \checkmark$

d) Normale $(5, -4, 3)$: $5x - 4y + 3z = 10 - 4 = 6$. **Contrôles** : B : $15 - 12 + 3 = 6 \checkmark$; C : $5 - 8 + 9 = 6 \checkmark$

Réponse. Aire $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; $h_C = \frac{5}{\sqrt{3}}$; $\cos \hat{BAC} = \frac{4}{\sqrt{66}}$; (ABC) : $5x - 4y + 3z = 6$.

Correction de l'exercice 5 - Volume d'un parallélépipède

a) $\vec{u} \wedge \vec{v} = (0, 0, 4)$, puis

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (0, 0, 4) \cdot (0, 1, 3) = 12$$

— Volume 12.

b) Aire de la base $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = 4$; hauteur $\frac{12}{4} = 3$: c'est la **composante de $\vec{w}$ selon la normale** à la base (ici $w_3 = 3$, la base étant dans le plan $z = 0$).

c) $\frac{1}{6} \times 12 = 2$.

d) $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 12 > 0$: directe. Échanger deux vecteurs change le signe : $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ est **indirecte** (produit mixte -12).

Réponse. Volume 12 ; base 4, hauteur 3 ; tétraèdre 2 ; $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ directe, $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ indirecte.

Correction de l'exercice 6 - Hauteur d'un tétraèdre par le volume

a) $AB = \|(-1, 0, 1)\| = \sqrt{2}$, $AC = \|(0, -1, 1)\| = \sqrt{2}$, $BC = \|(1, -1, 0)\| = \sqrt{2}$: équilatéral, d'aire $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (0 \cdot 1 - 1 \cdot (-1), 1 \cdot 0 - (-1) \cdot 1, (-1)(-1) - 0) = (1, 1, 1)$ et $\overrightarrow{AO} = (-1, -1, 0)$:

$$V = \frac{1}{6} |(1, 1, 1) \cdot (-1, -1, 0)| = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

c) $V = \frac{1}{3} \times \text{aire} \times h$, donc $h = \frac{3V}{\text{aire}} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,15$.

d) Normale $(1, 1, 1)$ et $A : (ABC) : x + y + z = 2$. $d(O) = \frac{|0-2|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ✓ (La norme de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, $\sqrt{3}$, redonne aussi l'aire : $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ✓)

Réponse. ABC équilatéral de côté $\sqrt{2}$, aire $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $V = \frac{1}{3}$; $d(O, (ABC)) = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Correction de l'exercice 7 - Résoudre l'équation $\mathbf{u} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{w}$

a) $\vec{u} \wedge \vec{x}$ est orthogonal à $\vec{u}$: il faut $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$. Ici $1 - 1 + 0 = 0$ ✓

b) $\vec{u} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) = (\vec{u} \cdot \vec{u})\vec{w} - (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \vec{w}$, donc $\vec{u} \wedge \vec{x}_0 = \vec{w}$. Numériquement :

$$\vec{x}_0 = \frac{(1, -1, 1) \wedge (1, 1, 0)}{2} = \frac{(-1, 1, 2)}{2}, \quad \vec{u} \wedge \vec{x}_0 = (1, -1, 1) \quad \checkmark$$

c) $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{u} \wedge \vec{x}_0 \Leftrightarrow \vec{u} \wedge (\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} - \vec{x}_0$ colinéaire à $\vec{u}$. Solutions : $\vec{x}_0 + \lambda \vec{u}$, une droite.

d) Non, pas complètement : M n'est déterminé qu'à un point de l'axe de rotation près (les points de l'axe ont une vitesse nulle, ajouter $\lambda \vec{w}$ ne change rien). C'est exactement la droite de solutions de c).

Réponse. Condition $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ remplie ; solutions $\frac{1}{2}(-1, 1, 2) + \lambda(1, 1, 0)$.

Correction de l'exercice 8 - La matrice de $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{u} \wedge \mathbf{x}$

a) Bilinearité du produit vectoriel. $f(\vec{e}_1) = (0, 3, -2)$, $f(\vec{e}_2) = (-3, 0, 1)$, $f(\vec{e}_3) = (2, -1, 0)$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $M^T = -M$ ✓ $\ker f =$ vecteurs colinéaires à $\vec{u}$: $\text{Vect}(\vec{u})$, donc $\text{rgf} = 2$ (et $\text{Im}f = \vec{u}^\perp$).

c) $f^2(\vec{x}) = \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{x}) = (\vec{u} \cdot \vec{x})\vec{u} - \|\vec{u}\|^2 \vec{x}$. Puis $f^3(\vec{x}) = \vec{u} \wedge f^2(\vec{x}) = 0 - \|\vec{u}\|^2 \vec{u} \wedge \vec{x}$:

— $f^3 = -\|\vec{u}\|^2 f$, soit $M^3 = -14M$.

d) $M(0, 3, -2) = (-9 - 4, 0 + 2, 0 + 3) = (-13, 2, 3)$, puis

$M(-13, 2, 3) = (-6 + 6, -39 - 3, 26 + 2) = (0, -42, 28) = -14(0, 3, -2)$ ✓

Réponse. $M = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ antisymétrique, $\ker = \text{Vect}(\vec{u})$, rang 2 ; $M^3 = -14M$.

Correction de l'exercice 9 - Moment d'une force

a)

$$\vec{M}_O = (1, 2, 0) \wedge (0, 0, 3) = (2 \cdot 3 - 0, 0 - 1 \cdot 3, 0) = (6, -3, 0)$$

b) $\|\vec{M}_O\| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$; la droite d'action est la verticale passant par A, à distance $\sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ de O : $3 \times \sqrt{5}$ ✓

c) $\vec{PA} = \vec{PO} + \vec{OA}$ et bilinéarité. $\vec{BO} = (-1, 0, 0)$, $\vec{BO} \wedge \vec{F} = (0 - 0, 0 + 3, 0) = (0, 3, 0)$:

— $\vec{M}_B = (6, 0, 0)$; contrôle direct : $\vec{BA} \wedge \vec{F} = (0, 2, 0) \wedge (0, 0, 3) = (6, 0, 0)$ ✓

d) $\vec{PA} \wedge \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{PA}$ colinéaire à $\vec{F}$: P sur la **droite d'action** $x = 1$, $y = 2$. (Une force ne fait pas tourner autour d'un point de sa ligne d'action.)

Réponse. $\vec{M}_O = (6, -3, 0)$; $\|\vec{M}_O\| = 3\sqrt{5} = \|\vec{F}\|\sqrt{5}$; $\vec{M}_B = (6, 0, 0)$; nul sur la droite d'action.

Correction de l'exercice 10 - Compléter en base orthonormée directe

a) $\|(1, 2, 2)\| = \|(2, 1, -2)\| = 3$: unitaires. $(1, 2, 2) \cdot (2, 1, -2) = 2 + 2 - 4 = 0$: orthogonaux.

b) $(1, 2, 2) \wedge (2, 1, -2) = (-4 - 2, 4 + 2, 1 - 4) = (-6, 6, -3)$, donc

$$\vec{c} = \frac{1}{9}(-6, 6, -3) = \frac{1}{3}(-2, 2, -1)$$

— Unitaire ($4 + 4 + 1 = 9$) et orthogonal à $\vec{a}$, $\vec{b}$ (propriété du produit vectoriel). Base **directe** car $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b}) = \|\vec{a} \wedge \vec{b}\|^2 > 0$.

c) $(P^T P)_{11} = \vec{a} \cdot \vec{a} = 1$, $(P^T P)_{13} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{-2+4-2}{9} = 0$ ✓ ; $\det P = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \|\vec{c}\|^2 = 1$.

d) Base orthonormée : coordonnées = produits scalaires : $\vec{x} \cdot \vec{a} = 1$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = 2$, $\vec{x} \cdot \vec{c} = -2$.

Contrôle : $\vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{c} = \frac{1}{3}(1 + 4 + 4, 2 + 2 - 4, 2 - 4 + 2) = (3, 0, 0)$ ✓

Réponse. $\vec{c} = \frac{1}{3}(-2, 2, -1)$; $\det P = 1$; $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{c}$.

Correction de l'exercice 11 - Volume constant d'un tétraèdre

a) (ABC) : $x + y + z = 1$, normale $(1, 1, 1)$, et $(1, -1, 0) \cdot (1, 1, 1) = 0$: parallèle.

b) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (1, 1, 1)$ et $\overrightarrow{AD}_t = (t, 1 - t, 1)$:

$$V(t) = \frac{1}{6} |(1, 1, 1) \cdot (t, 1 - t, 1)| = \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{3}$$

— Le volume ne dépend pas de t .

c) La base ABC est fixe et D_t reste à la même distance $\frac{|3-1|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ du plan : même hauteur, même volume.

d) V est une fonction affine du déplacement : $\frac{1}{6}(1, 1, 1) \cdot (\overrightarrow{AD}_0 + t\vec{d})$. Pour $\vec{d}$ unitaire, la variation $\frac{1}{6}(1, 1, 1) \cdot \vec{d}$ est maximale quand $\vec{d}$ est colinéaire à la **normale** $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ (Cauchy-Schwarz).

Réponse. $V(t) = \frac{1}{3}$ constant (hauteur constante) ; variation maximale selon la normale $(1, 1, 1)$.

Correction de l'exercice 12 - Théorème de Pythagore pour les aires

a) Triangles rectangles en O : $A_{OAB} = \frac{2 \times 3}{2} = 3$, $A_{OBC} = \frac{3 \times 4}{2} = 6$, $A_{OCA} = \frac{4 \times 2}{2} = 4$.

b) $\overrightarrow{AB} = (-2, 3, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, 0, 4)$:

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (12, 8, 6), \quad A_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{144 + 64 + 36} = \frac{\sqrt{244}}{2} = \sqrt{61}$$

c) $3^2 + 6^2 + 4^2 = 9 + 36 + 16 = 61 = (\sqrt{61})^2$ ✓

d) $\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (6, 4, 3)$: ses coordonnées sont les aires des **projections** de ABC sur les plans (yOz) , (zOx) , (xOy) , c'est-à-dire OBC , OCA , OAB . La norme au carré est la somme des carrés des coordonnées : c'est Pythagore appliqué au « vecteur aire ».

Réponse. Aires 3, 6, 4 et $\sqrt{61}$; $61 = 9 + 36 + 16$.

Correction de l'exercice 13 - Triangle 13-14-15 : Héron et produit vectoriel

a) $AB = 14$, $AC = \sqrt{25 + 144} = 13$, $BC = \sqrt{81 + 144} = 15$.

b) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (0, 0, 14 \times 12) = (0, 0, 168)$: aire 84. Héron : $p = 21$,

$$\sqrt{21 \times (21 - 15) \times (21 - 13) \times (21 - 14)} = \sqrt{21 \times 6 \times 8 \times 7} = \sqrt{7056} = 84 \quad \checkmark$$

$$\text{c) } r = \frac{84}{21} = 4 ; R = \frac{13 \times 14 \times 15}{4 \times 84} = \frac{2730}{336} = \frac{65}{8}.$$

$$\text{d) } h_C = \frac{2 \times 84}{14} = 12 : \text{c'est l'ordonnée de } C, \text{ puisque } (AB) \text{ est l'axe des abscisses } \checkmark$$

— **À retenir** : le produit vectoriel évite les racines de Héron dès qu'on a des coordonnées.

Réponse. Côtés 14, 13, 15 ; aire 84 ; $r = 4$, $R = \frac{65}{8}$; $h_C = 12$.

Correction de l'exercice 14 - Volume par deux arêtes opposées

$$\text{a) } \delta = \frac{\left| [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] \right|}{\left| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} \right|} \text{ et } \left| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} \right| = AB \cdot CD \cdot \sin \theta, \text{ donc}$$

$$\left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}] \right| = AB \cdot CD \cdot \sin \theta \cdot \delta$$

— (le produit mixte est invariant, au signe près, par permutation) ; on divise par 6.

b) $AC = FH = \sqrt{2}$; $\overrightarrow{AC} = (1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{FH} = (-1, 1, 0)$ sont orthogonaux : $\sin \theta = 1$; les droites sont dans les plans $z = 0$ et $z = 1$, à distance $\delta = 1$.

$$— V = \frac{1}{6} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{3}.$$

c) Même valeur qu'à la plaquette 3 (cube moins quatre coins) $\checkmark$

d) Faire glisser $[CD]$ sur sa droite ne change ni CD , ni δ , ni θ : V est inchangé.

Réponse. $V = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot \delta \sin \theta$; tétraèdre $ACFH$: $\frac{1}{6} \times 2 \times 1 = \frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : hauteur d'un tétraèdre et pied hors de la face

a) $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 3)$: $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (6, 3, 2)$, de norme 7. Aire $\frac{7}{2}$; plan $6x + 3y + 2z = 6$.

b) $\overrightarrow{AD} = (0, 2, 3)$:

$$V = \frac{1}{6} |(6, 3, 2) \cdot (0, 2, 3)| = \frac{12}{6} = 2$$

c) Par le volume : $h = \frac{3V}{\text{aire}} = \frac{6}{7/2} = \frac{12}{7}$. Par la distance : $\frac{|6 + 6 + 6 - 6|}{7} = \frac{12}{7} \quad \checkmark$

d) $H = D - \frac{12}{49}(6, 3, 2) = \left(-\frac{23}{49}, \frac{62}{49}, \frac{123}{49}\right)$; contrôle : $6H_x + 3H_y + 2H_z = \frac{-138 + 186 + 246}{49} = 6 \quad \checkmark$

— Tout point du triangle ABC a des coordonnées **positives** (combinaison convexe de A , B , C), or $H_x < 0$: le pied est **hors** du triangle. La hauteur d'un tétraèdre ne tombe pas forcément dans la face opposée.

Réponse. (ABC) : $6x + 3y + 2z = 6$, aire $\frac{7}{2}$; $V = 2$; $h = \frac{12}{7}$; $H(-\frac{23}{49}, \frac{62}{49}, \frac{123}{49})$ hors du triangle.