

**Plaquette 5 - Sphères, surfaces,
isométries : problèmes de synthèse**
Géométrie du plan et de l'espace — Licence 1 (L1)
Corrections détaillées

Boîte à outils

Sphère de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon R : $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.

— Section par un plan à distance $d < R$ du centre : cercle de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$; plan **tangent** en T : normale $\overrightarrow{\Omega T}$.

— **Sphère de diamètre** $[AB]$: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

— **Projection** orthogonale sur le plan $\vec{n}^\perp$ ($\|\vec{n}\| = 1$) : $p(\vec{x}) = \vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{n}$; **réflexion** : $s(\vec{x}) = \vec{x} - 2(\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{n}$.

— **Rotation** d'axe dirigé par $\vec{u}$ unitaire et d'angle θ : matrice orthogonale de déterminant 1, et

$$\text{tr}R = 1 + 2 \cos \theta$$

— Une matrice orthogonale A ($A^T A = I$) conserve les longueurs ; $\det A = 1$: rotation, $\det A = -1$: composée d'une rotation et d'une réflexion.

Correction de l'exercice 1 - Sphère : centre, section et plan tangent

a) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 1 + 4 + 9 - 5 = 9$: sphère de centre $\Omega(1, 2, 3)$ et de rayon 3.

b) Le plan $z = 1$ est à la distance $d = 2 < 3$ du centre : la section est le cercle du plan $z = 1$ de centre $(1, 2, 1)$ et de rayon $\sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$, d'équation $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

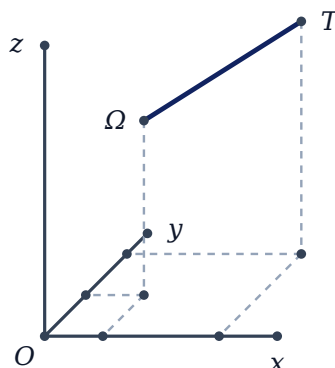
c) $9 + 16 + 16 - 6 - 16 - 24 + 5 = 0$ ✓ Normale $\overrightarrow{\Omega T} = (2, 2, 1)$:

$$2(x - 3) + 2(y - 4) + (z - 4) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + z = 18$$

— **Contrôle** : $d(\Omega) = \frac{|2 + 4 + 3 - 18|}{3} = 3 = R$ ✓

d) En O le premier membre vaut $5 > 0$, soit $O\Omega^2 - R^2 = 14 - 9 = 5$: **extérieur**. Tangentes de longueur $\sqrt{5}$ (Pythagore dans le triangle rectangle en T).

Réponse. $\Omega(1, 2, 3)$, $R = 3$; section $z = 1$: cercle de rayon $\sqrt{5}$; plan tangent $2x + 2y + z = 18$; O extérieur, tangentes $\sqrt{5}$.



Le centre Ω et le point T

Correction de l'exercice 2 - Droite et sphère : corde

a) $M = (1 + 2t, 2 + 2t, t)$ dans l'équation : $(2t)^2 + (2t)^2 + (t - 3)^2 = 9$, soit $9t^2 - 6t = 0$, $t \in \left\langle 0, \frac{2}{3} \right\rangle$.

— Points $A(1, 2, 0)$ (déjà sur S) et $B\left(\frac{7}{3}, \frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Contrôle : $\Omega B^2 = \frac{16}{9} + \frac{16}{9} + \frac{49}{9} = 9 \checkmark$

b) $AB = \frac{2}{3}\|\vec{u}\| = \frac{2}{3} \times 3 = 2$.

c) $\overrightarrow{AQ} = (0, 0, 3)$, $\overrightarrow{AQ} \wedge \vec{u} = (0 \cdot 1 - 3 \cdot 2, 3 \cdot 2 - 0, 0) = (-6, 6, 0)$:

$$d(\Omega, D) = \frac{6\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}, \quad \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = R^2 - d^2 = 9 - 8 = 1$$

— Demi-corde 1, corde 2 $\checkmark$

d) $A \in S$: la droite est tangente $\Leftrightarrow$ elle est dans le plan tangent en A , de normale $\overrightarrow{QA} = (0, 0, -3) : \vec{u} = (a, b, 0)$, **horizontal**.

Réponse. Points A et $B\left(\frac{7}{3}, \frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right)$; corde 2 ; $d(\Omega, D) = 2\sqrt{2}$; tangente ssi $\vec{u}$ horizontal.

Correction de l'exercice 3 - Intersection de deux sphères

a) $x^2 - (x - 2)^2 = 9 - 4$, soit $4x - 4 = 5 : \Pi : x = \frac{9}{4}$.

b) Sur Π , S_1 donne $y^2 + z^2 = 9 - \frac{81}{16} = \frac{63}{16}$: cercle de centre $\left(\frac{9}{4}, 0, 0\right)$ et de rayon

$$r = \frac{\sqrt{63}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{4} \approx 1,98$$

c) Centres O et $\Omega(2, 0, 0)$; un point M du cercle vérifie $OM = 3$, $\Omega M = 2$. Avec $H\left(\frac{9}{4}, 0, 0\right)$: $OH^2 + r^2 = \frac{81}{16} + \frac{63}{16} = 9 \checkmark$ et $\Omega H^2 + r^2 = \frac{1}{16} + \frac{63}{16} = 4 \checkmark$

d) Tangence $\Leftrightarrow$ distance des centres $= 3 + \rho$ ou $|3 - \rho|$: $2 = 3 + \rho$ impossible ; $|3 - \rho| = 2$: $\rho = 1$ (tangence **intérieure** en $(3, 0, 0)$) ou $\rho = 5$ (S_1 intérieure à S_2 , tangente en $(-3, 0, 0)$).

Réponse. Plan $x = \frac{9}{4}$; cercle de centre $\left(\frac{9}{4}, 0, 0\right)$, rayon $\frac{3\sqrt{7}}{4}$; tangentes pour $\rho = 1$ ou $\rho = 5$.

Correction de l'exercice 4 - Sphère de diamètre donné

a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = MI^2 - IA^2$: nul $\Leftrightarrow MI = IA = \frac{AB}{2}$.

b) $(x - 1)x + y(y - 2) + z(z - 2) = 0$:

$$x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y - 2z = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = \frac{9}{4}$$

— Centre $\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$ (milieu de $[AB]$ $\checkmark$), rayon $\frac{3}{2} = \frac{AB}{2}$ ($AB = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3 \checkmark$).

c) O vérifie l'équation ($0 = 0$) : oui. En effet $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$: l'angle $\widehat{AOB}$ est **droit**, et O « voit » le diamètre sous un angle droit.

d) $x = z = 0 : y^2 - 2y = 0, y \in \{0, 2\}$: points O et $(0, 2, 0)$ (contrôle : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (1, -2, 0) \cdot (0, 0, 2) = 0 \checkmark$).

Réponse. $x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y - 2z = 0$; centre $\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$, rayon $\frac{3}{2}$; O et $(0, 2, 0)$ sur la sphère.

Correction de l'exercice 5 - Plans tangents à la sphère unité

- a)** $d(O, \Pi_d) = \frac{|d|}{\sqrt{3}}$: sécant si $|d| < \sqrt{3}$, tangent si $|d| = \sqrt{3}$, extérieur si $|d| > \sqrt{3}$.
- b)** Le point de contact est le projeté de $O : \frac{d}{3}(1, 1, 1)$. Pour $d = \pm\sqrt{3} : T_{\pm} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ (bien de norme 1 ✓).
- c)** Distance $\frac{1}{\sqrt{3}}$: rayon $\sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, centre $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.
- $(1, 0, 0)$: sur S et sur Π_1 ✓ ; distance au centre du cercle : $\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ✓
- d)** Normale $\overrightarrow{OT} = (a, b, c)$ et T dans le plan :
- $$a(x - a) + b(y - b) + c(z - c) = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz = a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

Réponse. Tangent pour $d = \pm\sqrt{3}$ en $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$; $d = 1$: cercle de rayon $\sqrt{2/3}$; plan tangent $ax + by + cz = 1$.

Correction de l'exercice 6 - Le cylindre autour de la grande diagonale

- a)** $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u} = (y - z, z - x, x - y)$ et $\|\vec{u}\|^2 = 3$: formule de la distance à une droite.
- b)** $(y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2 = 3$, soit en développant
- $$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{3}{2}$$
- c)** $y = z = 0 : x^2 = \frac{3}{2}, x = \pm\frac{\sqrt{6}}{2} \approx \pm 1,22$.
- d)** Dans ce plan (orthogonal à Δ et passant par O), on a $d(M, \Delta) = OM$ (le projeté de M sur Δ est O). L'intersection est le **cercle** de centre O et de rayon 1 du plan $x + y + z = 0$: $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$.
- **Vérification** : $(x + y + z)^2 = 0$ donne $xy + yz + zx = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$, et l'équation b) devient $\frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{3}{2}$ ✓

Réponse. Cylindre : $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{3}{2}$; points $(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}, 0, 0)$; section : cercle unité du plan $x + y + z = 0$.

Correction de l'exercice 7 - Sections d'un cône : les trois coniques

- a)** $x^2 + y^2 = 4$: **cercle** de rayon 2 dans le plan $z = 2$.
- b)** $1 + y^2 = z^2$, soit $z^2 - y^2 = 1$: **hyperbole** dans le plan $x = 1$.
- c)** $x^2 + y^2 = (x + 1)^2$ donne $y^2 = 2x + 1$: la projection est une **parabole** (et la section aussi, la projection $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ étant affine et bijective du plan sur (xOy)).
- d)** $x^2 + y^2 = (2x + 1)^2$, soit $3x^2 + 4x + 1 - y^2 = 0$, puis
- $$3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{3}$$
- **hyperbole**. Pente du plan par rapport à l'horizontale : 0 (cercle), 1 = pente des génératrices (parabole), plus que 1 (hyperbole) ; entre 0 et 1 on obtiendrait une ellipse. C'est l'origine du nom de **coniques**.

Réponse. $z = 2$: cercle ; $x = 1$: hyperbole ; $z = x + 1$: parabole $y^2 = 2x + 1$; $z = 2x + 1$: hyperbole.

Correction de l'exercice 8 - Projection et réflexion par rapport à un plan

a) $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ et $p(\vec{x}) = \vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{n}$; la matrice de $\vec{x} \mapsto (\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{n}$ est $\vec{n}\vec{n}^T = \frac{1}{3}J$.

b) $J^2 = 3J : P^2 = I - \frac{2}{3}J + \frac{1}{9} \times 3J = I - \frac{1}{3}J = P \checkmark$ $\text{tr}P = 3 - 1 = 2 = \text{dimension du plan (rang d'un projecteur)}$.

$$\text{c) } S = 2P - I = I - \frac{2}{3}J = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$S^2 = 4P^2 - 4P + I = I, \quad \text{tr}S = 1, \quad \det S = -1$$

— (S vaut 1 sur le plan, deux fois, et -1 sur la normale : trace $1 + 1 - 1$, déterminant -1 .)

d) $P\vec{e}_1 = \frac{1}{3}(2, -1, -1)$ (somme nulle : dans $\Pi \checkmark$) ; $S\vec{e}_1 = \frac{1}{3}(1, -2, -2)$; $\vec{e}_1 - S\vec{e}_1 = \frac{2}{3}(1, 1, 1)$, colinéaire à $\vec{n} \checkmark$

Réponse. $P = I - \frac{1}{3}J$ (trace 2) ; $S = I - \frac{2}{3}J$, $S^2 = I$, $\text{tr}S = 1$, $\det S = -1$.

Correction de l'exercice 9 - Le demi-tour autour d'un axe

a) $R\vec{n} = 2\vec{n}(\vec{n}^T\vec{n}) - \vec{n} = 2\vec{n} - \vec{n} = \vec{n}$. Si $\vec{n}^T\vec{x} = 0 : R\vec{x} = -\vec{x}$.

b) Dans une base orthonormée $(\vec{n}, \vec{d}, \vec{b})$, la matrice est $\text{diag}(1, -1, -1)$, qui est la rotation d'angle π autour de $\vec{n}$ ($\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$).

c) R est symétrique et $R^2 = \frac{4}{9}J^2 - \frac{4}{3}J + I = \frac{4}{3}J - \frac{4}{3}J + I = I$, donc $R^T R = I$.

$\det R = 1 \times (-1)^2 = 1$; $\text{tr}R = 2 - 3 = -1 = 1 + 2 \cos \pi \checkmark$

d) $RS = \left(\frac{2}{3}J - I\right)\left(I - \frac{2}{3}J\right) = -\left(I - \frac{2}{3}J\right)^2 = -S^2 = -I$: la **symétrie centrale** de centre O .

$$R \circ S = -\text{id}$$

— Demi-tour d'axe Δ suivi de la réflexion par rapport au plan orthogonal à Δ : symétrie par rapport au point O .

Réponse. R : demi-tour d'axe $(1, 1, 1)$; $\det R = 1$, $\text{tr}R = -1$; $RS = -I_3$.

Correction de l'exercice 10 - Une rotation qui permute les coordonnées

a) $f(\vec{e}_1) = \vec{e}_2$, $f(\vec{e}_2) = \vec{e}_3$, $f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

— Colonnes orthonormées : $A^T A = I_3$; $\det A = 1$ (permutation circulaire = deux échanges).

b) $(z, x, y) = (x, y, z) \Leftrightarrow x = y = z$: axe $\mathbb{R}(1, 1, 1)$.

c) $\text{tr}A = 0 = 1 + 2 \cos \theta$, $\cos \theta = -\frac{1}{2}$, $\theta = \pm \frac{2\pi}{3}$. Signe :

$\det(\vec{u}, \vec{e}_1, \vec{e}_2) = \vec{u} \cdot (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) = \vec{u} \cdot \vec{e}_3 = 1 > 0$: $\theta = +\frac{2\pi}{3}$ (axe orienté par $\vec{u}$).

d) $A^3 = I_3$ (trois permutations circulaires reviennent au départ) : $3 \times \frac{2\pi}{3} = 2\pi \checkmark$ Le triangle $\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ (équilatéral, de centre sur l'axe) est envoyé sur lui-même.

Réponse. A orthogonale, $\det A = 1$; axe $(1, 1, 1)$; angle $\frac{2\pi}{3}$; $A^3 = I_3$.

Correction de l'exercice 11 - Toute rotation de l'espace a un axe

a) $A(I - A^T) = A - AA^T = A - I$ (car $A^T = A^{-1}$ commute avec A).

b) $\det(A - I) = \det A \cdot \det(I - A^T) = \det((I - A)^T) = \det(I - A)$, et en dimension 3 :

$$\det(I - A) = (-1)^3 \det(A - I) = -\det(A - I)$$

— Donc $\det(A - I) = 0$: $A - I$ n'est pas injective, il existe $\vec{u} \neq \vec{0}$ avec $A\vec{u} = \vec{u}$: c'est l'**axe**.

c) Si $\vec{x} \cdot \vec{u} = 0$: $A\vec{x} \cdot \vec{u} = A\vec{x} \cdot A\vec{u} = \vec{x} \cdot \vec{u} = 0$ (A conserve le produit scalaire). Sur ce plan, A agit comme une rotation plane.

d) En dimension 2, $(-1)^2 = 1$: l'argument tombe, et une rotation plane d'angle non nul n'a aucun vecteur fixe. Pour $\det A = -1$ en dimension 3, le même calcul donne $\det(A + I) = 0$: il existe un vecteur **retourné** ($A\vec{u} = -\vec{u}$), par exemple la normale d'une réflexion.

Réponse. $\det(A - I) = -\det(A - I) = 0$: il existe un axe $A\vec{u} = \vec{u}$; faux en dimension paire.

Correction de l'exercice 12 - Composer deux réflexions

a) $s_1(x, y, z) = (-x, y, z)$; s_2 échange x et y : $s_2(x, y, z) = (y, x, z)$ (le vecteur $(1, -1, 0)$, normal à $x = y$, est changé en son opposé ✓).

b) $s_2 \circ s_1(x, y, z) = s_2(-x, y, z) = (y, -x, z)$; $s_1 \circ s_2(x, y, z) = s_1(y, x, z) = (-y, x, z)$.

c) $s_1 \circ s_2$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: rotation d'axe (Oz) et d'angle $+\frac{\pi}{2}$; $s_2 \circ s_1$ est la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

— Les plans $x = 0$ et $x = y$ se coupent selon (Oz) et font un angle de $\frac{\pi}{4}$: l'angle de rotation est le **double**.

d) La composée de deux réflexions par rapport à des plans sécants selon une droite Δ , faisant un angle α , est la rotation d'axe Δ et d'angle 2α :

$$\det(s_1 \circ s_2) = (-1)(-1) = 1$$

Réponse. $s_1 \circ s_2(x, y, z) = (-y, x, z)$: rotation d'axe (Oz) , d'angle $\frac{\pi}{2} = 2 \times \frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 13 - Cercle circonscrit à un triangle de l'espace

a) Équation « segmentaire » : $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$, soit $2x + y + z = 2$.

b) $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y - 2)^2 + z^2 \Leftrightarrow -2x + 1 = -4y + 4 \Leftrightarrow -2x + 4y = 3$. Et $MB = MC \Leftrightarrow y = z$ (par symétrie de B, C).

c) Avec $y = z$ et le plan : $2x + 2y = 2$, $x = 1 - y$; puis $-2 + 2y + 4y = 3$, $y = \frac{5}{6}$.

$$\omega = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right), \quad R^2 = \omega A^2 = \frac{25}{36} + \frac{25}{36} + \frac{25}{36} = \frac{75}{36}$$

— $R = \frac{5\sqrt{3}}{6} \approx 1,44$.

d) $\omega B^2 = \frac{1}{36} + \frac{49}{36} + \frac{25}{36} = \frac{75}{36}$ ✓ ; ωC^2 identique par symétrie ✓ ; et $\omega \in (ABC)$: $\frac{2}{6} + \frac{5}{6} + \frac{5}{6} = 2$ ✓

Réponse. (ABC) : $2x + y + z = 2$; $\omega(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6})$, $R = \frac{5\sqrt{3}}{6}$.

Correction de l'exercice 14 - Deux diagonales orthogonales du cube

a) $\vec{u} = \overrightarrow{AG} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = \overrightarrow{BD} = (-1, 1, 0)$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

b) $\vec{u} \wedge \vec{v} = (0 - 1, -1 - 0, 1 + 1) = (-1, -1, 2)$ et $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 0)$:

$$d = \frac{|(1, 0, 0) \cdot (-1, -1, 2)|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0,41$$

— Produit mixte non nul : non coplanaires.

c) $P = (t, t, t)$, $Q = (1 - s, s, 0)$, $\overrightarrow{PQ} = (1 - s - t, s - t, -t)$. Conditions : $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 1 - 3t = 0$ et $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = -1 + 2s = 0$ (le terme en t s'annule). $t = \frac{1}{3}$, $s = \frac{1}{2}$:

— $P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ et $Q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ (centre de la face $ABCD$).

d) $\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{6}(-1, -1, 2)$, de norme $\frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ ✓

Réponse. Orthogonales, non coplanaires ; $d = \frac{1}{\sqrt{6}}$; $P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $Q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : l'hexagone régulier dans le cube

a) Normale $\overrightarrow{AG} = (1, 1, 1)$ et $\Omega \in \Pi : x + y + z = \frac{3}{2}$.

b) Sur une arête, deux coordonnées valent 0 ou 1 ; la somme doit faire $\frac{3}{2}$: une coordonnée vaut 1, une 0, et la dernière $\frac{1}{2}$. Six milieux : $I\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$ de $[BC]$, $J\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$ de $[CD]$, $K\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$ de $[DH]$, $L\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$ de $[HE]$, $M\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$ de $[EF]$, $N\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$ de $[FB]$.

c) Chaque côté relie deux milieux d'arêtes d'une même face : $IJ = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, de même pour les autres. Tous les sommets sont à la distance $\frac{\sqrt{2}}{2}$ de Ω (par exemple $\Omega I^2 = \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4}$) : hexagone **régulier** de côté $s = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2}s^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1,30$$

d) Les triangles BDE et CFH ont une aire $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$: la section centrale est la plus grande des trois. Π est entre $x + y + z = 1$ et $x + y + z = 2$, à la distance $\frac{1/2}{\sqrt{3}}$ de chacun : à **égale distance** ✓

Réponse. $\Pi : x + y + z = \frac{3}{2}$; six milieux d'arêtes ; hexagone régulier de côté $\frac{\sqrt{2}}{2}$, d'aire $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.