

Plaquette 3 – Droites et plans de l'espace : positions et distances

Géométrie du plan et de l'espace — Licence 1 (L1)

Exercices

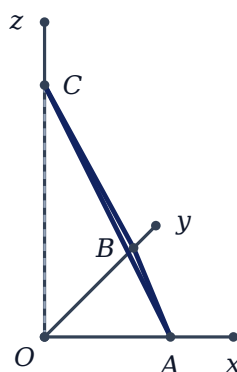
Méthode

Dans l'espace, une droite a **deux** descriptions (paramétrique, ou intersection de deux plans) et un plan aussi (paramétrique, ou une équation). Chaque question se résout dans la description la plus commode : l'intersection droite-plan en **substituant** le paramétrage dans l'équation, la position de deux droites par le **produit mixte**, les distances par les formules du produit scalaire ou vectoriel. On contrôle chaque résultat en réinjectant les coordonnées trouvées.

Exercice 1 – Plan défini par trois points

Soient $A(2, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(0, 0, 4)$.

- Justifier que A , B , C définissent un plan et en donner une représentation paramétrique.
- Calculer un vecteur normal par un produit vectoriel et en déduire une équation cartésienne.
- Le point $D(1, 1, 1)$ appartient-il au plan (ABC) ? Écrire D comme combinaison $A + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$.
- Calculer la distance de l'origine au plan (ABC) .

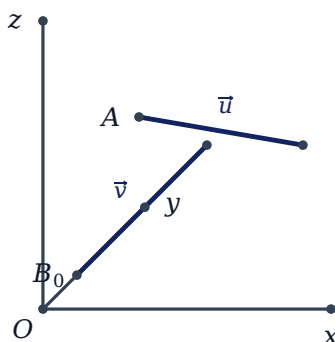


Le triangle ABC , sommets sur les axes

Exercice 2 – Deux droites : sécantes ou non coplanaires

Soient D passant par $A(1, 0, 2)$ de vecteur $\vec{u}(1, 2, -1)$, et D_m passant par $B_m(0, 1, m)$ de vecteur $\vec{v}(1, 1, 1)$.

- Montrer que les droites ne sont jamais parallèles.
- Calculer le produit mixte $[\overrightarrow{AB_m}, \vec{u}, \vec{v}]$ et en déduire pour quelle valeur de m elles sont sécantes.
- Pour cette valeur, déterminer le point d'intersection en résolvant le système.
- Pour $m = 0$, calculer la distance des deux droites.

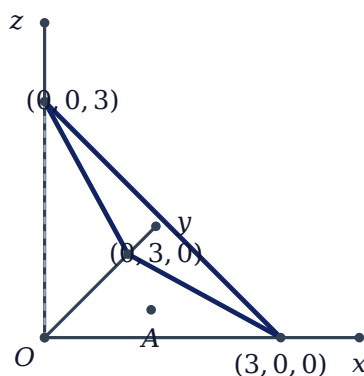


Les droites D et D_0 (points A , B_0 et vecteurs directeurs)

Exercice 3 – Droite et plan avec paramètre

Soient le plan $P : x + y + z = 3$ et la droite D_m passant par $A(1, 1, 0)$ de vecteur $\vec{u}_m(1, m, 1)$.

- Pour quelle valeur de m la droite est-elle parallèle au plan ? Est-elle alors contenue dans le plan ?
- Pour les autres valeurs, déterminer le point d'intersection I_m .
- Calculer I_0 et I_1 et les vérifier.
- Pour quelle valeur de m la droite est-elle orthogonale au plan ?



Traces du plan P sur les axes, et le point A

Exercice 4 - Faisceau de plans

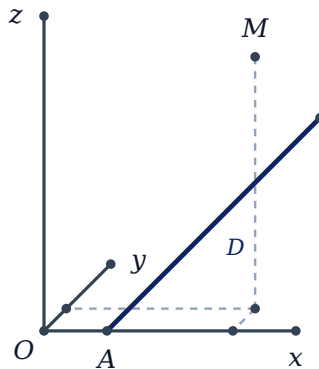
Soient $P : x + y - z - 1 = 0$ et $Q : x - y + 2z = 0$, et $\Delta = P \cap Q$.

- Justifier que Δ est une droite et en donner un vecteur directeur.
- Montrer que pour tous réels $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, l'équation $\lambda(x + y - z - 1) + \mu(x - y + 2z) = 0$ définit un plan contenant Δ .
- Déterminer le plan contenant Δ et le point $M(1, 2, 3)$.
- Déterminer le plan contenant Δ et parallèle à l'axe (Oz) .

Exercice 5 - Projeté d'un point sur une droite

Soient $M(3, 1, 4)$ et D la droite passant par $A(1, 0, 0)$ de vecteur $\vec{u}(1, 1, 1)$.

- Déterminer le projeté orthogonal H de M sur D (condition $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 0$).
- En déduire $d(M, D)$.
- Retrouver cette distance par la formule du produit vectoriel.
- Déterminer le symétrique de M par rapport à D .



Le point M et la droite D passant par A

Exercice 6 - Projeter une droite sur un plan

Soient $P : x + y + z = 0$ et D passant par $A(1, 1, 1)$ de vecteur $\vec{u}(1, 2, 3)$.

- Déterminer le point d'intersection I de D et P .
- Déterminer le projeté orthogonal A' de A sur P .
- En déduire la projection orthogonale D' de D sur P (droite (IA')) et en donner un vecteur directeur.
- Retrouver ce vecteur comme projeté de $\vec{u} : \vec{u} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$.

Exercice 7 - Angle d'une droite et d'un plan

Soient D de vecteur $\vec{u}(1, 1, 0)$ et $P : x - z = 0$.

- Donner un vecteur normal $\vec{n}$ de P .
- Calculer l'angle α entre $\vec{u}$ et $\vec{n}$, puis l'angle $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$ entre D et P .

c) Justifier la formule $\sin \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{n}\|}$.

d) Trouver un vecteur $\vec{w}$ de P , unitaire, tel que l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soit φ (projeté de $\vec{u}$ sur P).

Exercice 8 – Plans parallèles et plan médian

Soient $P_1 : 2x - y + 2z = 1$ et $P_2 : 2x - y + 2z = 7$.

a) Justifier que les plans sont parallèles.

b) Calculer leur distance de deux façons : par la formule, puis en projetant un point de P_1 sur P_2 .

c) Déterminer le plan équidistant des deux.

d) Déterminer les plans parallèles à P_1 situés à la distance 3 de l'origine.

Exercice 9 – Droite : paramétrage et système d'équations

a) Soit Δ la droite définie par $x + y = 2$ et $y - z = 1$. En donner un point et un vecteur directeur.

b) Vérifier le résultat en résolvant le système avec $y = t$ comme paramètre.

c) Soit Δ' la droite $(1, 2, 3) + s(2, 1, -1)$. En éliminant s , l'écrire comme intersection de deux plans.

d) Δ et Δ' sont-elles sécantes ?

Exercice 10 – Plan contenant une droite, parallèle à une autre

Soient D_1 passant par $A(1, 0, 0)$ de vecteur $\vec{u}_1(1, 1, 0)$ et D_2 passant par $B(0, 0, 2)$ de vecteur $\vec{u}_2(0, 1, 1)$.

a) Déterminer le plan Π contenant D_1 et parallèle à D_2 .

b) Calculer $d(B, \Pi)$.

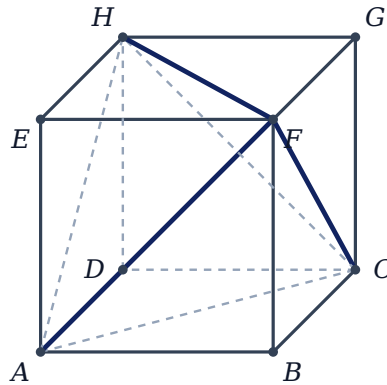
c) Justifier que cette distance est celle des deux droites, et la comparer à la formule du produit mixte.

d) Que se passerait-il si B était $(0, 0, 1)$?

Exercice 11 – Le tétraèdre régulier inscrit dans un cube

Dans le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1 repéré par $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on considère le tétraèdre $ACFH$.

- Donner les coordonnées de A, C, F, H et montrer que toutes les arêtes du tétraèdre ont la même longueur.
- Déterminer une équation du plan (CFH) et la distance de A à ce plan.
- Calculer le volume du tétraèdre de deux façons (hauteur $\times$ base, et cube moins quatre coins).
- Calculer le cosinus de l'angle entre les faces (CFH) et (AFH) (angle des normales).

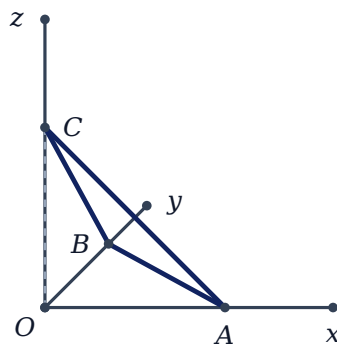


Le tétraèdre ACFH dans le cube

Exercice 12 – Points équidistants de trois points

Soient $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

- Montrer que l'ensemble des points équidistants de A et B est un plan (plan médiateur) ; en donner l'équation.
- En déduire l'ensemble L des points équidistants de A, B, C .
- Déterminer le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC .
- Déterminer la sphère passant par O, A, B, C (centre sur L).

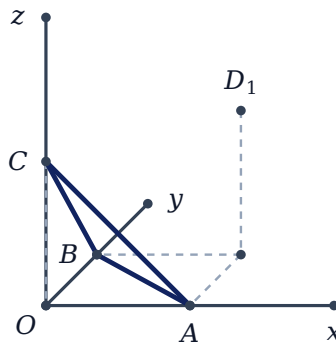


Le triangle ABC

Exercice 13 – Quatre points coplanaires

Soient $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ et $D_m(1, 1, m)$.

- Calculer $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD_m})$.
- Pour quelle valeur de m les quatre points sont-ils coplanaires ? Vérifier avec l'équation du plan (ABC) .
- Pour $m = 1$, calculer le volume du tétraèdre $ABCD_1$.
- Pour $m = 1$, calculer la distance de D_1 au plan (ABC) et retrouver le volume.

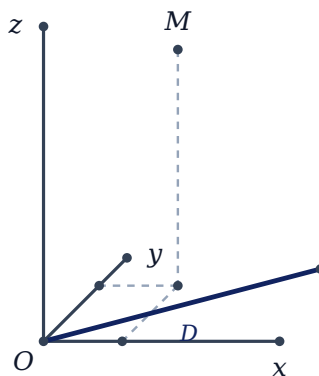


Le triangle ABC et le point $D_1(1, 1, 1)$

Exercice 14 – Distance à une droite par minimisation

Soient $M(1, 2, 3)$ et D la droite $\{t(1, 1, 0), t \in \mathbb{R}\}$.

- Exprimer $f(t) = \|M - t(1, 1, 0)\|^2$ comme un trinôme en t .
- Déterminer son minimum ; en déduire $d(M, D)$ et le projeté H .
- Vérifier avec la formule du produit vectoriel.
- Montrer en général que le minimum de $t \mapsto \|\overrightarrow{AM} - t\vec{u}\|^2$ est atteint en $t = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.

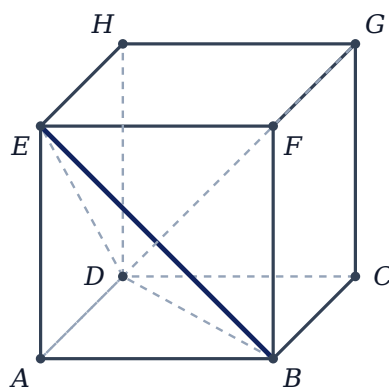


Le point M et la droite D du plan (xOy)

Exercice 15 - Synthèse : la grande diagonale du cube

Dans le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1 repéré par $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$:

- Déterminer une équation du plan (BDE) et du plan (CFH) ; montrer qu'ils sont parallèles.
- Montrer que la diagonale (AG) est orthogonale à ces plans et déterminer ses points d'intersection I et J avec eux.
- Montrer que I et J partagent $[AG]$ en trois segments égaux.
- Calculer la distance entre les deux plans et l'angle entre (AG) et l'arête (AB) .



Le triangle BDE et la diagonale [AG]