

Plaquette 2 - Géométrie plane : droites, cercles et triangles

Géométrie du plan et de l'espace — Licence 1 (L1)

Exercices

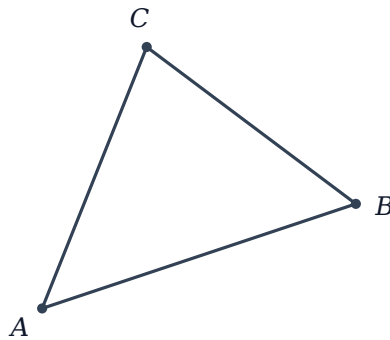
Méthode

Dans un repère orthonormé du plan, tout se ramène à deux objets : la **droite** $ax + by + c = 0$, de vecteur normal $\vec{n}(a, b)$, et le **cercle** $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. On traduit chaque question géométrique (tangence, orthogonalité, point équidistant, lieu de points) en **équation**, on résout, puis on **contrôle** sur la figure et par un calcul indépendant (distance, produit scalaire).

Exercice 1 - Distance d'un point à une droite et aire

On donne $A(1, 1)$, $B(7, 3)$, $C(3, 6)$.

- Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) .
- Calculer la distance de C à (AB) .
- En déduire l'aire du triangle ABC , et la contrôler par un déterminant.
- Déterminer le pied H de la hauteur issue de C .

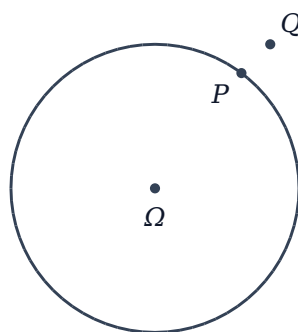


Le triangle ABC

Exercice 2 – Reconnaître un cercle, tangente

Soit C l'ensemble des points vérifiant $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.

- Montrer que C est un cercle ; préciser son centre Ω et son rayon.
- Vérifier que $P(5, 1) \in C$ et déterminer la tangente à C en P .
- Déterminer les points d'intersection de C avec l'axe des ordonnées.
- Le point $Q(6, 2)$ est-il intérieur ou extérieur à C ?

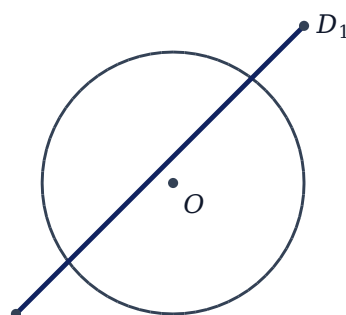


Le cercle, le point P et le point Q

Exercice 3 – Droite et cercle : sécante ou tangente

Soient le cercle $C : x^2 + y^2 = 25$ et la droite $D_m : y = x + m$.

- Former l'équation aux abscisses des points d'intersection.
- Discuter selon m le nombre de points d'intersection ; retrouver le résultat par la distance de O à D_m .
- Pour $m = 1$, déterminer les points d'intersection et la longueur de la corde.
- Vérifier cette longueur par le théorème de Pythagore (distance au centre et demi-corde).

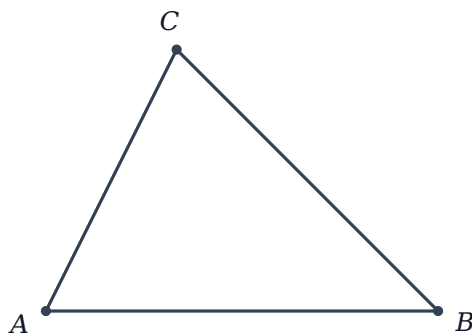


Le cercle de rayon 5 et la droite $y = x + 1$

Exercice 4 – Cercle circonscrit à un triangle

Soit le triangle $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(2, 4)$.

- Écrire les équations des médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$.
- En déduire le centre Ω du cercle circonscrit et son rayon R .
- Vérifier que Ω est équidistant des trois sommets et écrire l'équation du cercle.
- Le triangle est-il rectangle ? Le justifier à l'aide de la position de Ω .

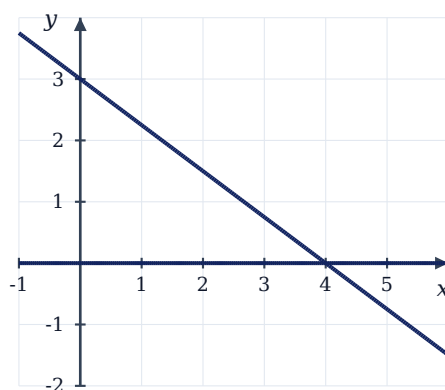


Le triangle ABC

Exercice 5 – Bissectrices de deux droites

Soient $D_1 : 3x + 4y - 12 = 0$ et $D_2 : y = 0$.

- Déterminer leur point d'intersection I .
- Montrer qu'un point M est équidistant des deux droites si et seulement si $3x + 4y - 12 = \pm 5y$.
- En déduire les équations des deux bissectrices et vérifier qu'elles passent par I et sont perpendiculaires.
- Quelle bissectrice contient le centre du cercle inscrit dans le triangle formé par D_1 , D_2 et l'axe des ordonnées ?

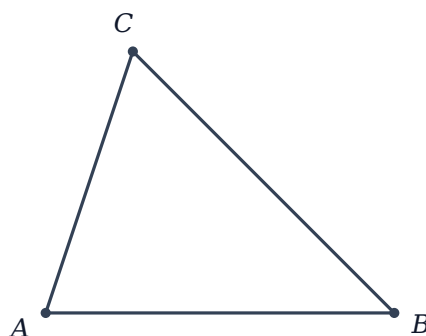


Les droites $D_1 : 3x + 4y = 12$ et $D_2 : y = 0$

Exercice 6 – Barycentre et fonction de Leibniz

Soient $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(1, 3)$ et $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$.

- Déterminer l'isobarycentre G de A , B , C .
- Démontrer que $f(M) = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$ (développer $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}$).
- En déduire le minimum de f et le point où il est atteint.
- Déterminer l'ensemble des points M tels que $f(M) = 20$.



Le triangle ABC

Exercice 7 – Le cercle d'Apollonius

Soient $A(0, 0)$ et $B(3, 0)$. On cherche l'ensemble Γ des points M tels que $MA = 2MB$.

- Traduire la condition par une équation en (x, y) (on élèvera au carré, en justifiant).
- Montrer que Γ est un cercle ; préciser centre et rayon.
- Déterminer les points de Γ situés sur (AB) et vérifier la condition.
- Montrer que l'un de ces points est le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$ et l'autre celui de $(A, 1)$, $(B, -2)$; que représente le segment qui les joint pour Γ ?

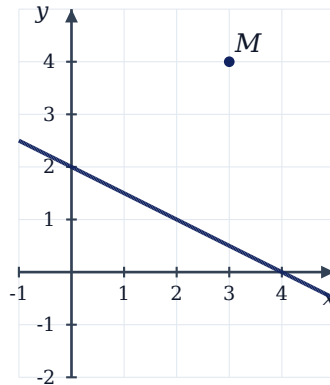


Les points A et B sur l'axe des abscisses

Exercice 8 - Projection et réflexion par rapport à une droite

Soient $D : x + 2y - 4 = 0$ et $M(3, 4)$.

- Déterminer le projeté orthogonal H de M sur D .
- En déduire le symétrique M' de M par rapport à D et vérifier que D est la médiatrice de $[MM']$.
- Écrire la matrice de la réflexion vectorielle d'axe la droite $x + 2y = 0$ et vérifier que son carré est I_2 .
- Calculer sa trace et son déterminant ; interpréter.

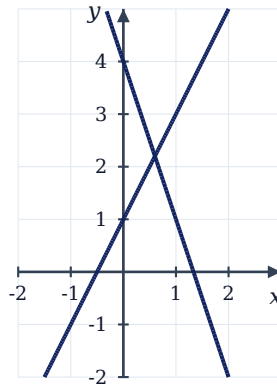


La droite $D : x + 2y = 4$ et le point M

Exercice 9 - Angle de deux droites

Soient $D_1 : y = 2x + 1$ et $D_2 : y = -3x + 4$.

- Déterminer leur point d'intersection.
- Calculer le cosinus de l'angle aigu qu'elles forment ; conclure.
- Retrouver ce résultat avec la formule $\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$.
- Déterminer la droite passant par l'intersection et perpendiculaire à D_1 .

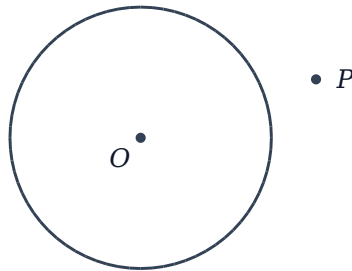


Les droites $y = 2x + 1$ et $y = -3x + 4$

Exercice 10 - Tangentes issues d'un point extérieur

Soient $C : x^2 + y^2 = 5$ et $P(3, 1)$.

- Vérifier que P est extérieur à C .
- Un point $T \in C$ est point de contact d'une tangente issue de P si et seulement si $\overrightarrow{OT} \cdot \overrightarrow{PT} = 0$. En déduire que T est sur la droite $3x + y = 5$.
- Déterminer les deux points de contact et les équations des tangentes.
- Calculer la longueur PT de deux façons, et l'angle entre les deux tangentes.

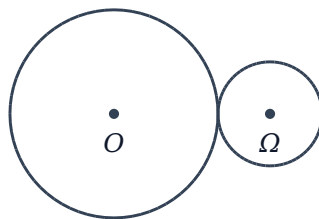


Le cercle de rayon $\sqrt{5}$ et le point P

Exercice 11 - Puissance d'un point et axe radical

Soient $C_1 : x^2 + y^2 = 4$ et $C_2 : (x - 3)^2 + y^2 = 1$.

- On appelle puissance de M par rapport à $C(\Omega, R)$ le nombre $p(M) = M\Omega^2 - R^2$. Écrire $p_1(M)$ et $p_2(M)$.
- Déterminer l'ensemble des points de même puissance par rapport aux deux cercles (axe radical).
- Déterminer $C_1 \cap C_2$; interpréter la position des cercles.
- Montrer que de tout point M de l'axe radical extérieur aux cercles, les tangentes aux deux cercles ont même longueur.

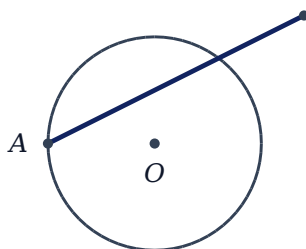


Les cercles C_1 (centre O , rayon 2) et C_2 (centre $\Omega(3, 0)$, rayon 1)

Exercice 12 - Paramétrage rationnel du cercle

Soit C le cercle unité et $A(-1, 0)$. Pour $t \in \mathbb{R}$, la droite passant par A de pente t recoupe C en un point M_t .

- Montrer que $M_t = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)$.
- Calculer M_t pour $t = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}$.
- En déduire des triplets d'entiers (a, b, c) avec $a^2 + b^2 = c^2$.
- Relier t à l'angle θ de M_t : montrer que $t = \tan \frac{\theta}{2}$.

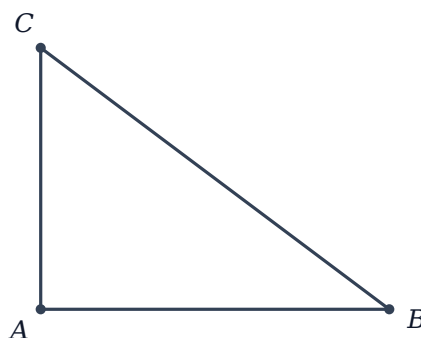


Le cercle unité et une droite passant par $A(-1, 0)$

Exercice 13 - Cercle inscrit dans le triangle 3-4-5

Soit le triangle $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(0, 3)$.

- Calculer les longueurs des côtés $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.
- Le centre du cercle inscrit est $I = \frac{aA + bB + cC}{a + b + c}$ (barycentre pondéré par les côtés opposés). Le calculer.
- Vérifier que I est à la même distance r des trois côtés.
- Retrouver r par la formule $\text{aire} = r \times \frac{a + b + c}{2}$.

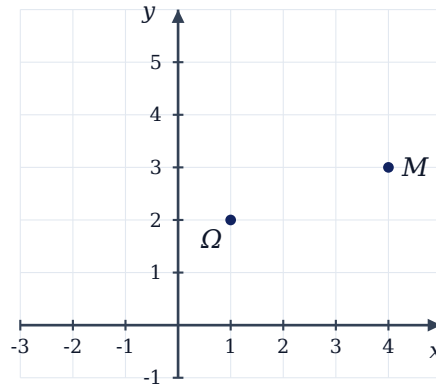


Le triangle rectangle ABC

Exercice 14 – Rotation de centre quelconque

Soit ρ la rotation de centre $\Omega(1, 2)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- Écrire ρ en coordonnées : $\rho(M) = \Omega + R \overrightarrow{\Omega M}$ avec R la matrice de rotation.
- Calculer l'image de $M(4, 3)$ et vérifier que $\Omega M' = \Omega M$ et $\overrightarrow{\Omega M} \perp \overrightarrow{\Omega M'}$.
- Déterminer l'image de la droite $y = 2$.
- Calculer $\rho \circ \rho$; reconnaître cette transformation et l'appliquer à M .

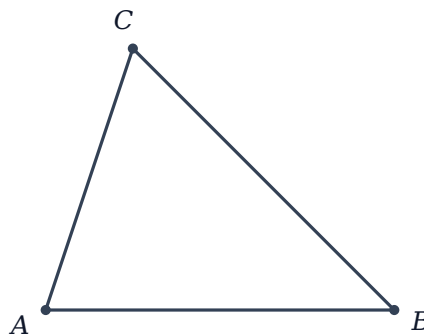


Le centre Ω et le point M

Exercice 15 – Synthèse : droite d'Euler et cercle des neuf points

Soit le triangle $A(0, 0)$, $B(8, 0)$, $C(2, 6)$.

- Déterminer le centre Ω et le rayon R du cercle circonscrit.
- Déterminer l'orthocentre H (intersection de deux hauteurs) et le centre de gravité G .
- Vérifier la relation d'Euler $\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}$; que dire de Ω , G , H ?
- Soit N le milieu de $[\Omega H]$. Montrer que les milieux des côtés et le pied de la hauteur issue de C sont sur le cercle de centre N et de rayon $\frac{R}{2}$.



Le triangle ABC