

Plaquette 1 - Produit scalaire, produit vectoriel, droites et plans

Géométrie du plan et de l'espace — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

On calcule avec le **produit scalaire** (angles, orthogonalité, projections), le **produit vectoriel** (normales, aires) et le **produit mixte** (volumes), puis on manipule équations de droites et de plans, distances et intersections.

Exercice 1 - Produit scalaire et angle

Soient $\vec{u}(1, 2, 2)$ et $\vec{v}(2, -1, 2)$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, les normes et l'angle.

Exercice 2 - Orthogonalité

Déterminer m pour que $\vec{u}(1, m, 2)$ et $\vec{v}(3, -1, m)$ soient orthogonaux.

Exercice 3 - Produit vectoriel

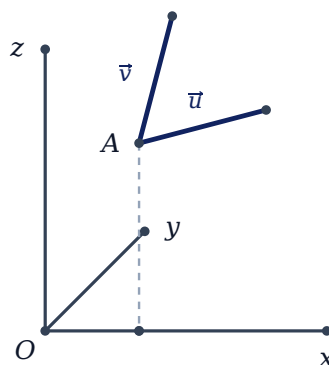
Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$ pour $\vec{u}(1, 0, 2)$ et $\vec{v}(0, 1, 3)$, puis l'aire du parallélogramme associé.

Exercice 4 - Produit mixte et coplanarité

Les vecteurs $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 1)$ et $(4, 5, 7)$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 5 - Équation d'un plan

Déterminer l'équation du plan passant par $A(1, 0, 2)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(1, 1, 0)$ et $\vec{v}(0, 1, 1)$.



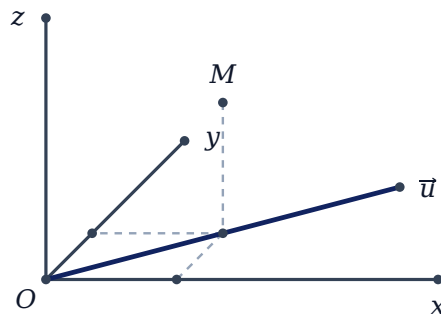
Le point A et les deux vecteurs directeurs du plan

Exercice 6 - Distance d'un point à un plan

Calculer la distance du point $M(3, 1, -2)$ au plan $P : 2x - y + 2z - 4 = 0$.

Exercice 7 – Distance d'un point à une droite

Calculer la distance du point $M(1, 1, 1)$ à la droite passant par $A(0, 0, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1, 1, 0)$.



La droite $(O ; u)$ du plan (xOy) et le point M

Exercice 8 – Intersection de deux plans

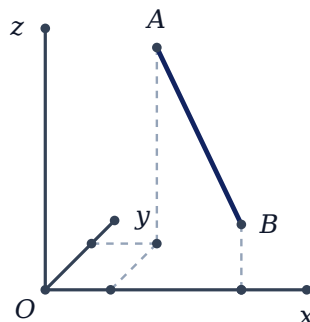
Déterminer l'intersection des plans $x + y + z = 1$ et $x - y + z = 3$.

Exercice 9 – Droite et plan

La droite $(1, 0, 0) + t(1, 2, 1)$ coupe-t-elle le plan $x + y - 3z = 2$? Si oui, en quel point ?

Exercice 10 – Plan médiateur

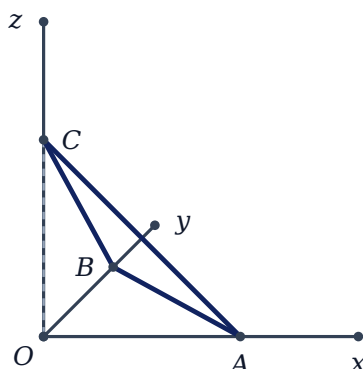
Déterminer l'équation du plan médiateur du segment $[AB]$ avec $A(1, 2, 3)$ et $B(3, 0, 1)$.



Le segment $[AB]$ dont on cherche le plan médiateur

Exercice 11 – Aire d'un triangle

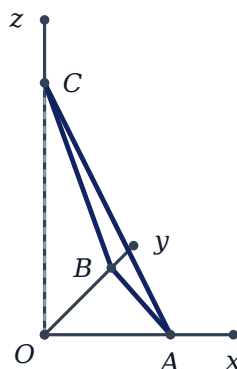
Calculer l'aire du triangle de sommets $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ et $C(0, 0, 1)$.



Le triangle ABC, sommets sur les trois axes

Exercice 12 – Volume d'un tétraèdre

Calculer le volume du tétraèdre $OABC$ avec $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 4)$.



Le tétraèdre OABC

Exercice 13 – Angle de deux plans et droite d'intersection

Soient $P : x + 2y + 2z = 3$ et $Q : 2x - y + 2z = 1$.

- Justifier que les plans sont sécants et calculer l'angle aigu qu'ils forment (angle de leurs normales).
- Déterminer un vecteur directeur de la droite $\Delta = P \cap Q$ par un produit vectoriel.
- Trouver un point de Δ (on prendra $z = 0$) et en donner une représentation paramétrique.
- Calculer la distance de l'origine O à Δ .

Exercice 14 - Distance de deux droites non coplanaires

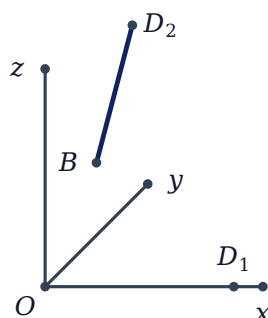
Soient D_1 l'axe (Ox) , de vecteur $\vec{u} = (1, 0, 0)$, et D_2 la droite passant par $B(0, 2, 1)$ de vecteur $\vec{v} = (0, 1, 1)$.

a) Montrer que D_1 et D_2 ne sont pas coplanaires (produit mixte).

b) Calculer leur distance par la formule $d = \frac{\|[\vec{OB}, \vec{u}, \vec{v}]\|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$.

c) Déterminer les points $P \in D_1$ et $Q \in D_2$ tels que (PQ) soit orthogonale aux deux droites (perpendiculaire commune).

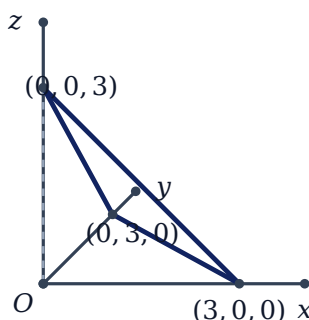
d) Vérifier que PQ est bien la distance trouvée en b).



L'axe (Ox) et la droite passant par B de vecteur $(0, 1, 1)$

Exercice 15 - Synthèse : projeté et symétrique

Soit $P : x + y + z = 3$ et $M(0, 0, 0)$. Déterminer le projeté orthogonal H de M sur P et le symétrique M' .



Trace du plan $x + y + z = 3$ sur les axes ; M est l'origine O