

Plaquette 4 - Produit vectoriel et produit mixte : aires, volumes, identités

Géométrie du plan et de l'espace — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Le produit vectoriel fabrique un vecteur **orthogonal** à deux vecteurs donnés, dont la **norme** est l'aire du parallélogramme qu'ils engendrent ; le produit mixte donne le **volume** orienté. On apprend à calculer vite (déterminants 2×2 en croix), à démontrer les identités classiques (Lagrange, double produit vectoriel), et à exploiter ces outils en géométrie (aires, hauteurs, volumes) et en physique (moment d'une force).

Exercice 1 - Règles de calcul du produit vectoriel

- Calculer $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$, $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$, $\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1$ et $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1$ à partir de la formule.
- Retrouver la formule générale en développant $(u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3) \wedge (v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3)$ par bilinéarité.
- Montrer que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ (développement selon la troisième colonne).
- En déduire que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, et calculer $(1, 2, 3) \wedge (2, 4, 6)$.

Exercice 2 - Identité de Lagrange

- Vérifier l'identité $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$ pour $\vec{u}(1, 2, 3)$ et $\vec{v}(4, 5, 6)$.
- En déduire $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin \theta|$.
- Retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz et son cas d'égalité.
- Calculer l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et le sinus de leur angle.

Exercice 3 - Double produit vectoriel

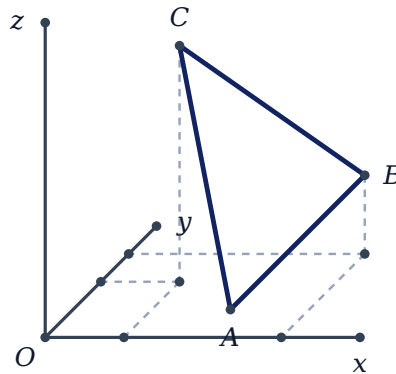
Soient $\vec{u}(1, 1, 0)$, $\vec{v}(1, 0, 1)$, $\vec{w}(0, 1, 2)$.

- Calculer $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ directement.
- Vérifier la formule $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$.
- Calculer $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ et conclure sur l'associativité.
- En déduire l'identité de Jacobi $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{0}$ à partir de la formule de b).

Exercice 4 – Aire, hauteur et angle d'un triangle de l'espace

Soient $A(2, 1, 0)$, $B(3, 3, 1)$, $C(1, 2, 3)$.

- Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et l'aire du triangle ABC .
- En déduire la hauteur issue de C .
- Calculer $\cos \widehat{BAC}$ et $\sin \widehat{BAC}$ et vérifier $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC}$.
- Donner une équation du plan (ABC) .

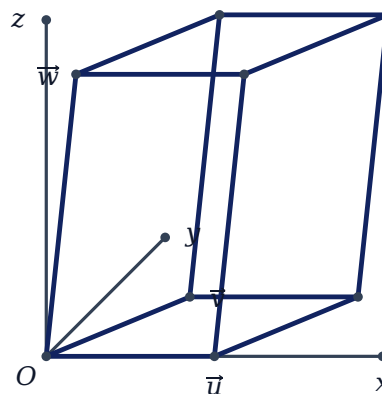


Le triangle ABC

Exercice 5 – Volume d'un parallélépipède

Soit le parallélépipède construit sur $\vec{u}(2, 0, 0)$, $\vec{v}(1, 2, 0)$, $\vec{w}(0, 1, 3)$ à partir de l'origine.

- Calculer son volume par le produit mixte.
- Calculer l'aire de la base construite sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et en déduire la hauteur ; interpréter.
- Quel est le volume du tétraèdre $O, O + \vec{u}, O + \vec{v}, O + \vec{w}$?
- La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle directe ? Et $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$?



Le parallélépipède construit sur u, v, w

Exercice 6 – Hauteur d'un tétraèdre par le volume

Soient $O, A(1, 1, 0), B(0, 1, 1), C(1, 0, 1)$.

- Montrer que ABC est équilatéral et calculer son aire.
- Calculer le volume du tétraèdre $OABC$ par le produit mixte.
- En déduire la distance de O au plan (ABC) .
- Vérifier avec l'équation du plan (ABC) et la formule de la distance.

Exercice 7 – Résoudre l'équation $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{w}$

Soient $\vec{u}(1, 1, 0)$ et $\vec{w}(1, -1, 1)$. On cherche les $\vec{x}$ tels que $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{w}$.

- Montrer qu'une condition nécessaire est $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$; est-elle remplie ?
- Vérifier que $\vec{x}_0 = \frac{\vec{w} \wedge \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$ est solution (formule du double produit).
- Montrer que l'ensemble des solutions est la droite $\vec{x}_0 + \lambda \vec{u}$.
- Interprétation : un solide tourne à la vitesse angulaire $\vec{\omega}$; la vitesse d'un point est $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$. Peut-on retrouver M à partir de $\vec{v}$?

Exercice 8 – La matrice de $\vec{x} \mapsto \vec{u} \wedge \vec{x}$

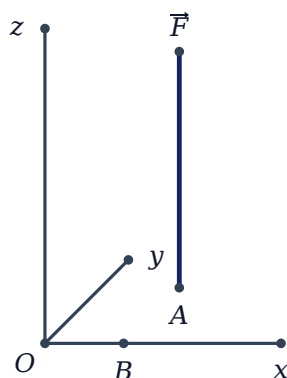
Soit $\vec{u}(1, 2, 3)$ et $f(\vec{x}) = \vec{u} \wedge \vec{x}$.

- Montrer que f est linéaire et écrire sa matrice M dans la base canonique.
- Vérifier que M est antisymétrique ; déterminer $\ker f$ et $\operatorname{rg} f$.
- Montrer que $M^3 = -\|\vec{u}\|^2 M$ (calculer $f(f(f(\vec{x})))$ par la formule du double produit).
- Vérifier numériquement c) sur la première colonne.

Exercice 9 – Moment d'une force

Une force $\vec{F}(0, 0, 3)$ s'applique au point $A(1, 2, 0)$. Son moment par rapport à un point P est $\vec{M}_P = \vec{PA} \wedge \vec{F}$.

- Calculer $\vec{M}_O$.
- Vérifier que $\|\vec{M}_O\| = \|\vec{F}\| \times d$, où d est la distance de O à la droite d'action de $\vec{F}$.
- Montrer que $\vec{M}_P = \vec{M}_O + \vec{PO} \wedge \vec{F}$ et calculer $\vec{M}_B$ pour $B(1, 0, 0)$.
- Pour quels points P le moment est-il nul ?



La force F appliquée en A , et le point B

Exercice 10 – Compléter en base orthonormée directe

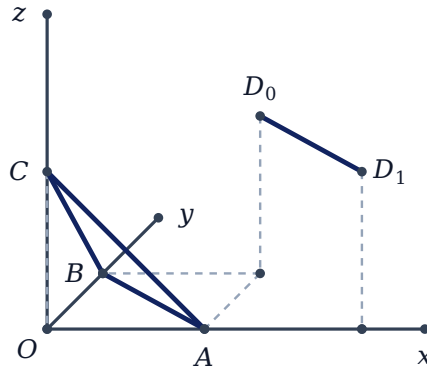
Soient $\vec{a} = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$ et $\vec{b} = \frac{1}{3}(2, 1, -2)$.

- Vérifier que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont unitaires et orthogonaux.
- Calculer $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ et vérifier que $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une base orthonormée directe.
- Écrire la matrice P de colonnes $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ et vérifier $P^T P = I_3$ sur deux coefficients, puis $\det P$.
- Donner les coordonnées de $\vec{x} = (3, 0, 0)$ dans cette base.

Exercice 11 – Volume constant d'un tétraèdre

Soient $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ et $D_t = (1, 1, 1) + t(1, -1, 0)$.

- Montrer que la droite décrite par D_t est parallèle au plan (ABC) .
- Calculer le volume $V(t)$ du tétraèdre $ABCD_t$ par le produit mixte ; conclure.
- Interpréter géométriquement (base fixe, hauteur...).
- Pour quelle direction $\vec{d}$ le volume de $ABC(D_0 + t\vec{d})$ varie-t-il le plus vite ?

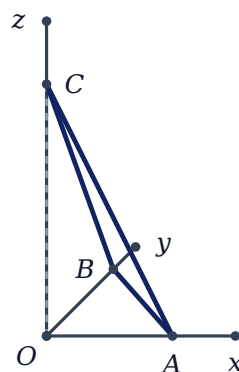


Le triangle ABC et deux positions du sommet D

Exercice 12 – Théorème de Pythagore pour les aires

Soit le tétraèdre trirectangle $OABC$ avec $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 4)$.

- Calculer les aires des trois faces rectangles OAB , OBC , OCA .
- Calculer l'aire de la face ABC par le produit vectoriel.
- Vérifier que $A_{ABC}^2 = A_{OAB}^2 + A_{OBC}^2 + A_{OCA}^2$ (théorème de De Gua).
- Expliquer cette égalité : que représentent les coordonnées de $\frac{1}{2}\vec{AB} \wedge \vec{AC}$?



Le tétraèdre trirectangle $OABC$

Exercice 13 – Triangle 13-14-15 : Héron et produit vectoriel

Soient $A(0, 0, 0)$, $B(14, 0, 0)$, $C(5, 12, 0)$.

- Calculer les longueurs des côtés.

- b) Calculer l'aire par le produit vectoriel, puis par la formule de Héron $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (p demi-périmètre).
- c) En déduire le rayon du cercle inscrit $r = \frac{\text{aire}}{p}$ et celui du cercle circonscrit $R = \frac{abc}{4 \text{ aire}}$.
- d) Calculer la hauteur issue de C et vérifier sur la figure en coordonnées.

Exercice 14 - Volume par deux arêtes opposées

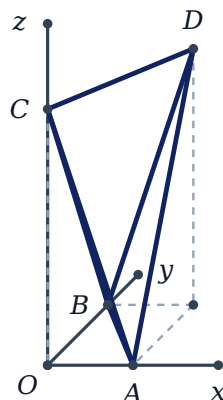
On admet que le volume d'un tétraèdre $ABCD$ vaut $V = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot \delta \cdot \sin \theta$, où δ est la distance des droites (AB) et (CD) et θ leur angle.

- a) Démontrer cette formule à partir de $V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}]|$ et de la formule de la distance de deux droites.
- b) Application au tétraèdre $ACFH$ du cube unité ($A(0, 0, 0)$, $C(1, 1, 0)$, $F(1, 0, 1)$, $H(0, 1, 1)$) avec les arêtes opposées $[AC]$ et $[FH]$.
- c) Comparer au volume $\frac{1}{3}$ trouvé à la plaquette 3.
- d) Montrer que V ne change pas si l'on fait glisser $[CD]$ le long de sa droite (même longueur).

Exercice 15 - Synthèse : hauteur d'un tétraèdre et pied hors de la face

Soient $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$ et $D(1, 2, 3)$.

- a) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, l'aire de ABC et une équation du plan (ABC) .
- b) Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$ par le produit mixte.
- c) En déduire la hauteur issue de D de deux façons.
- d) Déterminer le pied H de cette hauteur ; est-il à l'intérieur du triangle ABC ?



Le tétraèdre $ABCD$