

Plaquette 5 - Sphères, surfaces, isométries : problèmes de synthèse

Géométrie du plan et de l'espace — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

On réinvestit tout le chapitre sur des objets nouveaux : **sphères** (équation, sections planes, tangence), **cylindres** et **cônes** (lieux de points à distance donnée d'une droite, sections coniques), et **isométries** de l'espace (projections, réflexions, rotations) décrites par leurs matrices. La démarche : traduire la définition géométrique en équation, reconnaître l'objet obtenu, puis contrôler sur un point particulier.

Exercice 1 - Sphère : centre, section et plan tangent

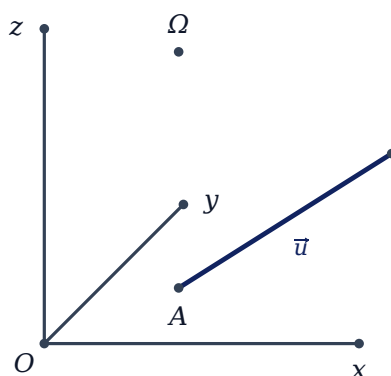
Soit S d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$.

- Montrer que S est une sphère ; donner son centre Ω et son rayon.
- Déterminer l'intersection de S avec le plan $z = 1$.
- Vérifier que $T(3, 4, 4) \in S$ et déterminer le plan tangent en T .
- L'origine est-elle intérieure ou extérieure à S ? Calculer la longueur des tangentes issues de O .

Exercice 2 - Droite et sphère : corde

Soient la sphère S de l'exercice 1 (centre $\Omega(1, 2, 3)$, rayon 3) et la droite D passant par $A(1, 2, 0)$ de vecteur $\vec{u}(2, 2, 1)$.

- Déterminer les points d'intersection de D et S .
- Calculer la longueur de la corde.
- Calculer la distance de Ω à D et retrouver la corde par Pythagore.
- Pour quels vecteurs $\vec{u}$ la droite passant par A est-elle tangente à S ?



Le centre Ω , le point A et la direction u

Exercice 3 – Intersection de deux sphères

Soient $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 9$ et $S_2 : (x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 4$.

- En soustrayant les équations, montrer que $S_1 \cap S_2$ est contenue dans un plan Π .
- Montrer que l'intersection est un cercle ; préciser son centre et son rayon.
- Vérifier le résultat par Pythagore dans le triangle formé par les deux centres et un point du cercle.
- Pour quelles valeurs du rayon ρ de S_2 (centre fixe) les sphères sont-elles tangentes ?

Exercice 4 – Sphère de diamètre donné

Soient $A(1, 0, 0)$ et $B(0, 2, 2)$.

- Montrer que $M \in \text{sphère de diamètre } [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ (utiliser le milieu I).
- En déduire une équation de cette sphère, son centre et son rayon.
- L'origine appartient-elle à cette sphère ? Interpréter à l'aide de l'angle $A\hat{O}B$.
- Déterminer l'intersection de la sphère avec l'axe (Oy) .

Exercice 5 – Plans tangents à la sphère unité

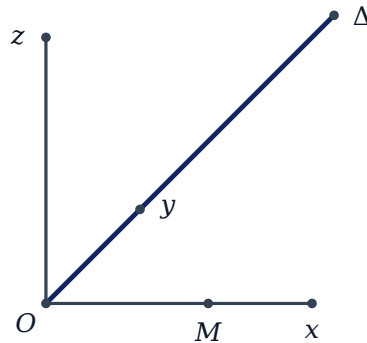
Soit S la sphère de centre O et de rayon 1, et $\Pi_d : x + y + z = d$.

- Discuter selon d la position de Π_d par rapport à S .
- Pour les valeurs de tangence, déterminer le point de contact.
- Pour $d = 1$, déterminer le rayon du cercle d'intersection et vérifier que $(1, 0, 0)$ est sur ce cercle.
- Montrer que le plan tangent en un point $T(a, b, c)$ de S a pour équation $ax + by + cz = 1$.

Exercice 6 – Le cylindre autour de la grande diagonale

Soit Δ la droite passant par O de vecteur $\vec{u}(1, 1, 1)$.

- Montrer que $d(M, \Delta)^2 = \frac{(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2}{3}$.
- En déduire une équation du cylindre de révolution d'axe Δ et de rayon 1.
- Déterminer les points de ce cylindre situés sur l'axe (Ox) .
- Déterminer l'intersection du cylindre avec le plan $x + y + z = 0$: quelle courbe obtient-on ?



L'axe Δ et un point M de l'axe (Ox)

Exercice 7 – Sections d'un cône : les trois coniques

Soit le cône $K : x^2 + y^2 = z^2$ (axe (Oz) , demi-angle au sommet $\frac{\pi}{4}$).

- Déterminer sa section par le plan $z = 2$.
- Déterminer sa section par le plan $x = 1$ et reconnaître la courbe.
- Déterminer sa section par le plan $z = x + 1$ (projeter sur le plan (xOy)) et reconnaître la courbe.
- Même question avec le plan $z = 2x + 1$. Expliquer le rôle de la pente du plan.

Exercice 8 – Projection et réflexion par rapport à un plan

Soit $\Pi : x + y + z = 0$ et J la matrice 3×3 remplie de 1.

- Montrer que la projection orthogonale sur Π a pour matrice $P = I_3 - \frac{1}{3}J$.
- Vérifier $P^2 = P$ et calculer $\text{tr}P$; interpréter.
- En déduire la matrice S de la réflexion par rapport à Π , et calculer S^2 , $\text{tr}S$, $\det S$.
- Calculer l'image de $\vec{e}_1$ par P et par S , et vérifier que $\vec{e}_1 - S(\vec{e}_1)$ est normal à Π .

Exercice 9 – Le demi-tour autour d'un axe

Soit $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ et $R = 2\vec{n}\vec{n}^T - I_3 = \frac{2}{3}J - I_3$.

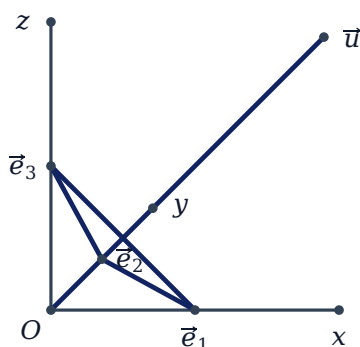
- Montrer que $R\vec{n} = \vec{n}$ et que $R\vec{x} = -\vec{x}$ pour $\vec{x} \perp \vec{n}$.
- En déduire que R est la rotation d'axe $\mathbb{R}\vec{n}$ et d'angle π (demi-tour).

- c) Vérifier $R^T R = I_3$, $\det R = 1$, et $\operatorname{tr} R = 1 + 2 \cos \pi$.
- d) Comparer avec la réflexion S de l'exercice précédent : que vaut RS ?

Exercice 10 - Une rotation qui permute les coordonnées

Soit $f(x, y, z) = (z, x, y)$.

- a) Écrire la matrice A de f et vérifier qu'elle est orthogonale de déterminant 1.
- b) Déterminer l'axe de f (vecteurs fixes).
- c) Déterminer l'angle θ par la trace, et son signe en calculant $\det(\vec{u}, \vec{e}_1, f(\vec{e}_1))$ avec $\vec{u} = (1, 1, 1)$.
- d) Calculer A^3 et interpréter.



Les vecteurs de base et l'axe dirigé par $u = (1, 1, 1)$

Exercice 11 - Toute rotation de l'espace a un axe

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A^T A = I_3$ et $\det A = 1$.

- a) Montrer que $\det(A - I_3) = \det(A(I_3 - A^T))$.
- b) En déduire $\det(A - I_3) = -\det(A - I_3)$, puis qu'il existe $\vec{u} \neq \vec{0}$ tel que $A\vec{u} = \vec{u}$.
- c) Montrer que A laisse stable le plan $\vec{u}^\perp$.
- d) Pourquoi ce résultat est-il faux en dimension 2 ? Et pour $\det A = -1$ en dimension 3 ?

Exercice 12 - Composer deux réflexions

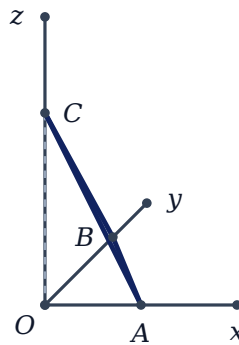
Soient s_1 la réflexion par rapport au plan $x = 0$ et s_2 celle par rapport au plan $x = y$.

- a) Donner les expressions de s_1 et s_2 en coordonnées, et leurs matrices.
- b) Calculer $s_2 \circ s_1$ et $s_1 \circ s_2$.
- c) Reconnaître ces composées (axe, angle) et comparer l'angle à celui des deux plans.
- d) Énoncer le résultat général suggéré.

Exercice 13 – Cercle circonscrit à un triangle de l'espace

Soient $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 2)$.

- Déterminer une équation du plan (ABC) .
- Écrire les deux équations traduisant $MA = MB$ et $MB = MC$.
- En déduire le centre ω du cercle circonscrit à ABC (point du plan (ABC)) et son rayon.
- Vérifier que ω est équidistant des trois sommets.

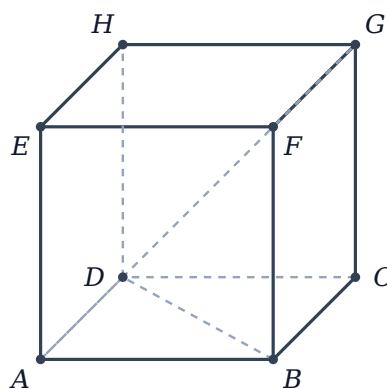


Le triangle ABC

Exercice 14 – Deux diagonales orthogonales du cube

Dans le cube unité $ABCDEFGH$ (repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$), on considère la grande diagonale (AG) et la diagonale de face (BD) .

- Montrer que (AG) et (BD) sont orthogonales.
- Montrer qu'elles ne sont pas coplanaires et calculer leur distance.
- Déterminer leur perpendiculaire commune (points $P \in (AG)$, $Q \in (BD)$).
- Vérifier que PQ est la distance trouvée.

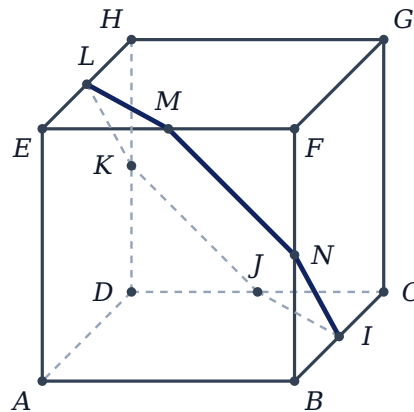


La grande diagonale $[AG]$ et la diagonale de face $[BD]$

Exercice 15 – Synthèse : l'hexagone régulier dans le cube

Dans le cube unité $ABCDEFGH$ (repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$), soit Π le plan passant par le centre $\Omega\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et orthogonal à (AG) .

- Montrer que $\Pi : x + y + z = \frac{3}{2}$.
- Déterminer les points d'intersection de Π avec les arêtes du cube (on en trouve six, milieux d'arêtes).
- Montrer que ces six points forment un hexagone régulier et calculer son aire.
- Comparer à l'aire des sections (BDE) et (CFH) (plaquette 3) ; le plan Π est-il à égale distance des deux ?



La section du cube par le plan Π