

Fiche de révision – Géométrie L1

Droites, plans, produits scalaire/vectorielle, distances et intersections

1. Vecteurs et coordonnées

Si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

Dans $\mathbb{R}^2$: $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$ sont colinéaires ssi

$$u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0.$$

Dans $\mathbb{R}^3$: colinéarité ssi coordonnées proportionnelles, ou $u \times v = 0$.

2. Droite du plan $\mathbb{R}^2$

Par $A(x_0, y_0)$, direction $u = (\alpha, \beta) \neq 0$:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Équation cartésienne :

$$ax + by + c = 0, \quad n = (a, b) \text{ normal.}$$

Un directeur est $u = (-b, a)$.

Paramétrique $\rightarrow$ cartésienne : avec $u = (\alpha, \beta)$,

$$\beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0.$$

3. Droite et plan dans $\mathbb{R}^3$

Droite par A , direction $u = (\alpha, \beta, \gamma)$:

$$M = A + tu.$$

Soit, coordonnée par coordonnée,

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t. \end{cases}$$

Plan par A , directions u, v non colinéaires :

$$M = A + su + tv.$$

Plan cartésien :

$$ax + by + cz + d = 0, \quad n = (a, b, c) \text{ normal.}$$

Pour passer de (A, u, v) à une équation cartésienne :

$$n = u \times v, \quad n \cdot \overrightarrow{AM} = 0.$$

4. Positions relatives

Droite $D : A + tu$ et plan Π de normal n :

- $u \cdot n \neq 0$: un point d'intersection unique ;
- $u \cdot n = 0$ et $A \in \Pi$: $D \subset \Pi$;
- $u \cdot n = 0$ et $A \notin \Pi$: $D \parallel \Pi$.

Deux plans : parallèles ssi leurs normaux sont colinéaires. Sinon, leur intersection est une droite de direction

$$n_1 \times n_2.$$

5. Produit scalaire, norme, angle

$$u \cdot v = \sum u_i v_i, \quad \|u\| = \sqrt{u \cdot u}.$$

Orthogonalité :

$$u \perp v \iff u \cdot v = 0.$$

Angle $\theta \in [0, \pi]$:

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}.$$

Pour l'angle aigu entre deux droites, prendre la valeur absolue au numérateur.

Cauchy-Schwarz :

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|.$$

6. Produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$

Pour $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$:

$$u \times v = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

Propriétés :

- $u \times v \perp u$ et $u \times v \perp v$;
- $u \times v = 0 \iff u, v$ colinéaires ;
- $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin \theta$;
- aire parallélogramme = $\|u \times v\|$;
- aire triangle = $\frac{1}{2} \|u \times v\|$.

7. Produit mixte et volume

$$[u, v, w] = u \cdot (v \times w) = \det(u, v, w).$$

$$u, v, w \text{ coplanaires} \iff [u, v, w] = 0.$$

Volume du parallélépipède :

$$V = |[u, v, w]|.$$

8. Projections et distances

Projection de v sur $\text{Vect}(u)$, $u \neq 0$:

$$\text{proj}_u(v) = \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u.$$

Distance point-point :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

Point $M_0(x_0, y_0)$ à $D : ax + by + c = 0$:

$$d(M_0, D) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ à $\Pi : ax + by + cz + d = 0$:

$$d(M_0, \Pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Point M à une droite $D = A + \mathbb{R}u$ de $\mathbb{R}^3$:

$$d(M, D) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \times u\|}{\|u\|}.$$

9. Procédures rapides

Plan par trois points A, B, C :

$$u = \overrightarrow{AB}, v = \overrightarrow{AC}, n = u \times v, \quad n \cdot \overrightarrow{AM} = 0.$$

Intersection droite-plan : substituer les coordonnées paramétriques de la droite dans l'équation du plan et résoudre en t .

Deux plans : comparer n_1, n_2 ; s'ils ne sont pas colinéaires, résoudre le système ou chercher une direction $n_1 \times n_2$.

Angle entre plans : angle entre leurs normaux.

Pièges à éviter

- Le produit vectoriel du cours est défini dans $\mathbb{R}^3$, pas comme un vecteur de $\mathbb{R}^2$.
- Une droite de $\mathbb{R}^3$ n'a pas une unique équation cartésienne : on la décrit paramétriquement ou comme intersection de deux plans.
- Ne pas confondre vecteur directeur et vecteur normal.
- Pour conclure à une intersection, toujours résoudre le système : le dessin ne prouve rien.