

Géométrie du plan et de l'espace en L1

Équations de droites et de plans, produit scalaire, produit vectoriel et distances

Licence 1 – Cours, méthodes et exercices corrigés

Objectif du chapitre. Traduire une situation géométrique en équations, puis utiliser les outils de l'algèbre linéaire et du calcul vectoriel pour déterminer des intersections, des angles, des distances, des aires et des volumes. En L1, une droite ou un plan doit pouvoir être décrit dans plusieurs langages et l'on doit savoir passer de l'un à l'autre.

1 Repères, points et vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Dans un repère cartésien, on identifie un point à ses coordonnées et un vecteur à la différence des coordonnées de deux points. Si

$$A(x_A, y_A, z_A), \quad B(x_B, y_B, z_B),$$

alors

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

En dimension 2, on supprime simplement la troisième coordonnée.

Définition

Deux vecteurs u et v sont **colinéaires** s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda v$. Dans $\mathbb{R}^3$, trois vecteurs u, v, w sont **coplanaires** s'ils appartiennent à un même plan vectoriel, c'est-à-dire si l'un est combinaison linéaire des deux autres.

Propriété

Pour $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$ dans $\mathbb{R}^2$,

$$u \text{ et } v \text{ colinéaires} \iff u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0.$$

Dans $\mathbb{R}^3$, on testera la colinéarité par proportionnalité des coordonnées ou, plus tard, par $u \times v = 0$.

2 Droites du plan

2.1 Représentation paramétrique

Une droite du plan est déterminée par un point et un vecteur directeur non nul.

Définition

Soit $A(x_0, y_0)$ et $u = (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. La droite D passant par A et de vecteur directeur u est

$$D = \{A + tu; t \in \mathbb{R}\}.$$

Une représentation paramétrique est donc

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

2.2 Équation cartésienne

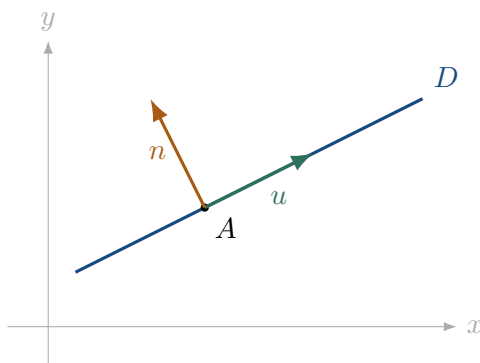
Définition

Toute droite du plan peut s'écrire

$$\boxed{ax + by + c = 0}, \quad (a, b) \neq (0, 0).$$

Le vecteur $n = (a, b)$ est un **vecteur normal** à la droite. Un vecteur directeur possible est

$$\boxed{u = (-b, a)}.$$



Méthode

Pour passer d'une représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t, \end{cases}$$

à une équation cartésienne, choisir un normal $n = (\beta, -\alpha)$ puis écrire

$$\beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0.$$

Réciproquement, à partir de $ax + by + c = 0$, prendre $u = (-b, a)$ puis trouver un point particulier de la droite.

Exemple

La droite

$$D : \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -3 + t \end{cases}$$

a pour vecteur directeur $(2, 1)$, donc un normal est $(1, -2)$. Comme $(1, -3) \in D$,

$$(x - 1) - 2(y + 3) = 0 \iff \boxed{x - 2y - 7 = 0}.$$

3 Droites et plans de l'espace

3.1 Droite de $\mathbb{R}^3$

Une droite de l'espace est encore donnée par un point et un vecteur directeur :

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t, \\ z = z_0 + \gamma t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

où $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$.

Une droite de $\mathbb{R}^3$ n'a pas, en général, une seule équation cartésienne. Elle peut être décrite comme l'intersection de deux plans non parallèles :

$$D : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$$

3.2 Plan de $\mathbb{R}^3$

Définition

Un plan Π passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et engendré par deux vecteurs non colinéaires u, v est

$$\Pi = \{A + su + tv; (s, t) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Une représentation paramétrique s'écrit donc

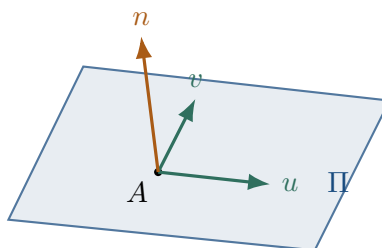
$$\begin{cases} x = x_0 + su_1 + tv_1, \\ y = y_0 + su_2 + tv_2, \\ z = z_0 + su_3 + tv_3. \end{cases}$$

Définition

Une équation cartésienne d'un plan est

$$ax + by + cz + d = 0, \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

Le vecteur $n = (a, b, c)$ est normal au plan.



Méthode

Pour obtenir une équation cartésienne d'un plan donné par A, u, v :

- déterminer un vecteur normal n orthogonal à u et v ; en $\mathbb{R}^3$, on peut prendre $n = u \times v$;
- écrire $n \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ pour $M(x, y, z)$.

4 Positions relatives et intersections

Les questions d'intersection se ramènent à des systèmes linéaires.

4.1 Deux droites du plan

Deux droites sont soit parallèles distinctes, soit confondues, soit sécantes. On peut comparer leurs vecteurs directeurs puis résoudre leurs équations.

4.2 Droite et plan dans $\mathbb{R}^3$

Soit une droite $D : A + tu$ et un plan Π de normal n .

$$\boxed{u \cdot n = 0}$$

signifie que la direction de D est parallèle au plan. Ensuite :

- si $A \in \Pi$, alors $D \subset \Pi$;
- si $A \notin \Pi$, alors $D \parallel \Pi$ sans intersection ;
- si $u \cdot n \neq 0$, la droite coupe le plan en un point unique.

Méthode

Pour trouver $D \cap \Pi$, substituer les coordonnées paramétriques de D dans l'équation de Π . On obtient une équation en t . Une solution unique donne le point d'intersection ; aucune solution signifie parallélisme ; une identité signifie que la droite est incluse dans le plan.

Exemple

$$D : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, \quad \Pi : x + y + z - 8 = 0.$$

On remplace :

$$(1 + t) + (2 - t) + (3 + 2t) - 8 = 0 \iff 2t - 2 = 0 \iff t = 1.$$

Donc

$$\boxed{D \cap \Pi = \{(2, 1, 5)\}}.$$

4.3 Deux plans

Deux plans de normaux n_1, n_2 sont parallèles si et seulement si n_1 et n_2 sont colinéaires. Sinon, leur intersection est une droite, dont un vecteur directeur est $n_1 \times n_2$.

5 Produit scalaire, norme et angles

Définition

Dans $\mathbb{R}^n$, pour $u = (u_1, \dots, u_n)$ et $v = (v_1, \dots, v_n)$,

$$\boxed{u \cdot v = \sum_{k=1}^n u_k v_k}.$$

La norme euclidienne est

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u}.$$

Propriété

Pour tous u, v ,

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$$

(inégalité de Cauchy-Schwarz), et si $u, v \neq 0$,

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}, \quad \theta \in [0, \pi].$$

En particulier,

$$u \perp v \iff u \cdot v = 0.$$

La distance entre deux points est

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

Exemple

Pour $u = (1, 2, -1)$ et $v = (2, -1, 0)$,

$$u \cdot v = 2 - 2 + 0 = 0,$$

donc u et v sont orthogonaux.

6 Produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$

Définition

Pour $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$,

$$u \times v = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

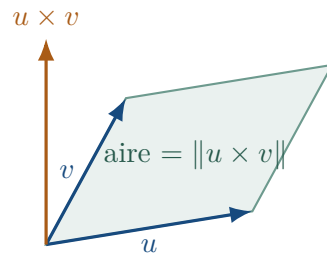
Il est orthogonal à u et v et son orientation suit la règle de la main droite.

Propriété

$$\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin \theta.$$

Ainsi :

- $u \times v = 0 \iff u, v$ sont colinéaires ;
- l'aire du parallélogramme engendré par u et v vaut $\|u \times v\|$;
- l'aire du triangle correspondant vaut $\frac{1}{2} \|u \times v\|$.



Piège classique

Le produit vectoriel $u \times v$ est un outil spécifique de $\mathbb{R}^3$ dans ce cours. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on n'écrit pas un produit vectoriel comme un vecteur du plan. On utilise plutôt le déterminant $u_1 v_2 - u_2 v_1$ pour tester la colinéarité ou calculer une aire orientée.

7 Produit mixte, coplanarité et volume

Définition

Pour $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, le **produit mixte** est

$$[u, v, w] = u \cdot (v \times w) = \det(u, v, w).$$

Propriété

- u, v, w sont coplanaires si et seulement si $[u, v, w] = 0$;
- le volume du parallélépipède engendré par u, v, w vaut

$$V = |[u, v, w]|.$$

8 Projections orthogonales et distances

8.1 Projection sur une droite vectorielle

Si $u \neq 0$, la projection orthogonale de v sur $\text{Vect}(u)$ est

$$\text{proj}_u(v) = \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u.$$

Le vecteur

$$v - \text{proj}_u(v)$$

est orthogonal à u .

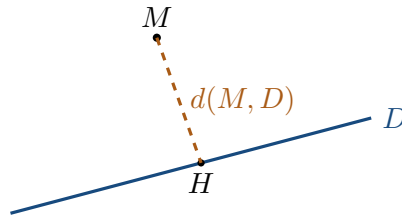
8.2 Distance d'un point à une droite du plan

Pour

$$D : ax + by + c = 0$$

et $M_0(x_0, y_0)$,

$$d(M_0, D) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



8.3 Distance d'un point à un plan

Pour

$$\Pi : ax + by + cz + d = 0$$

et $M_0(x_0, y_0, z_0)$,

$$d(M_0, \Pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

8.4 Distance d'un point à une droite de $\mathbb{R}^3$

Si D passe par A et a pour vecteur directeur $u \neq 0$, alors

$$d(M, D) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \times u\|}{\|u\|}.$$

En effet, le numérateur est l'aire du parallélogramme de côtés $\overrightarrow{AM}$ et u , soit base $\times$ hauteur.

Exemple

Soit $\Pi : 2x - y + 2z - 5 = 0$ et $M(1, 2, 1)$. Alors

$$d(M, \Pi) = \frac{|2 - 2 + 2 - 5|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{3}{3} = \boxed{1}.$$

9 Méthodes-types à maîtriser

Méthode : déterminer une équation de droite dans le plan

À partir de deux points A, B :

1. calculer $u = \overrightarrow{AB}$;
2. prendre un normal $n = (u_2, -u_1)$;
3. écrire $n \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

Méthode : déterminer une équation de plan

À partir de trois points non alignés A, B, C :

1. calculer $u = \overrightarrow{AB}$ et $v = \overrightarrow{AC}$;
2. calculer $n = u \times v$;
3. écrire $n \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

Méthode : angle entre deux droites ou deux plans

Pour deux droites, utiliser des vecteurs directeurs u, v et

$$\cos \theta = \frac{|u \cdot v|}{\|u\| \|v\|}$$

si l'on veut l'angle aigu entre les droites. Pour deux plans, appliquer la même formule à leurs vecteurs normaux.

10 Exercices corrigés**Exemple 1 – Équation d'un plan**

Soient $A(1, 0, 1)$, $B(2, 1, 1)$, $C(0, 1, 2)$. Déterminer une équation du plan (ABC) .

On a

$$u = \overrightarrow{AB} = (1, 1, 0), \quad v = \overrightarrow{AC} = (-1, 1, 1).$$

Donc

$$n = u \times v = (1, -1, 2).$$

Une équation du plan est

$$(1, -1, 2) \cdot (x - 1, y, z - 1) = 0,$$

d'où

$$\boxed{x - y + 2z - 3 = 0}.$$

Exemple 2 – Intersection d'une droite et d'un plan

Soit

$$D : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}, \quad \Pi : x + y - z - 4 = 0.$$

Substitution :

$$(2 - t) + (1 + 2t) - t - 4 = -1.$$

On obtient l'impossibilité $-1 = 0$. Donc

$$\boxed{D \parallel \Pi \text{ et } D \cap \Pi = \emptyset}.$$

Exemple 3 – Distance point-droite dans l'espace

Soit D passant par $A(1, 0, 0)$, de direction $u = (1, 1, 0)$, et $M(1, 1, 2)$. Alors

$$\overrightarrow{AM} = (0, 1, 2), \quad \overrightarrow{AM} \times u = (-2, 2, -1).$$

Ainsi

$$d(M, D) = \frac{\sqrt{4 + 4 + 1}}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{3}{\sqrt{2}}}.$$

Exemple 4 – Volume et coplanarité

Pour $u = (1, 0, 1)$, $v = (0, 2, 1)$ et $w = (1, 1, 0)$,

$$[u, v, w] = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -3.$$

Les trois vecteurs ne sont donc pas coplanaires et le volume du parallélépipède est

$\boxed{3}$.

11 Checklist de rédaction en L1

Avant de conclure, toujours préciser :

- le point et le ou les vecteurs directeurs utilisés ;
- le vecteur normal lorsqu'une équation cartésienne est écrite ;
- la dimension : une droite de $\mathbb{R}^2$ et une droite de $\mathbb{R}^3$ ne se décrivent pas de la même façon cartésienne ;
- les hypothèses de non-nullité ($u \neq 0$, normal non nul) ;
- l'objet géométrique obtenu après résolution du système : vide, un point, une droite ou un plan.

Piège classique

Ne pas confondre **direction** et **normal**. Un vecteur directeur appartient à la direction de la droite ou du plan ; un vecteur normal lui est orthogonal. Cette confusion inverse souvent toutes les conclusions sur le parallélisme et l'orthogonalité.