

Plaquette 3 - Changements de variable et symétries

Intégrale de Riemann — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Changement de variable (φ de classe C^1 , f continue) :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

- Parité : si f est impaire, $\int_{-a}^a f = 0$; si elle est paire, $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$.
- Échange des bornes : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$.
- Périodicité : si f est T -périodique, $\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$ pour tout a .
- Substitution $t = \tan \frac{x}{2}$: $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$.

Correction de l'exercice 1 - L'aire du quart de disque

Avec $x = \sin t$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$: $dx = \cos t dt$ et $\sqrt{1-x^2} = \cos t$ (positif sur cet intervalle). Les bornes 0 et 1 deviennent 0 et $\frac{\pi}{2}$.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{\pi}{4}$$

- Interprétation : la courbe $y = \sqrt{1-x^2}$ est le quart de cercle unité ; l'intégrale est l'aire du quart de disque, $\frac{\pi \times 1^2}{4}$.
- Avec un rayon a : $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{\pi a^2}{4}$.

Réponse. $\frac{\pi}{4}$ (aire du quart de disque).

Correction de l'exercice 2 - Éliminer une racine

On pose $x = t^2$, $t \in [0; 1]$: $dx = 2t dt$, les bornes restent 0 et 1.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{2t}{1+t} dt = 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt$$

- $= 2[t - \ln(1+t)]_0^1 = 2(1 - \ln 2) \approx 0,614$.
- Oublier le facteur $2t$ (c'est-à-dire écrire $dx = dt$) est l'erreur la plus fréquente.

Réponse. $2(1 - \ln 2)$.

Correction de l'exercice 3 - Logarithme au dénominateur

On pose $u = \ln x$: $du = \frac{dx}{x}$, et les bornes 1, e deviennent 0, 1.

$$\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln x)} = \int_0^1 \frac{du}{1+u} = \ln 2$$

- On pouvait aussi reconnaître directement $\frac{u'}{u}$ avec $u = 1 + \ln x$: une primitive est $\ln(1 + \ln x)$.

- Le changement de variable est la version « rédigée » de la reconnaissance d'une dérivée composée.

Réponse. $\ln 2$.

Correction de l'exercice 4 - Une exponentielle au dénominateur

On pose $t = e^x$: $dt = e^x dx$; les bornes 0 et $\ln 2$ deviennent 1 et 2.

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x dx}{1 + (e^x)^2} = \int_1^2 \frac{dt}{1 + t^2} = \arctan 2 - \frac{\pi}{4}$$

- Valeur approchée : $1,107 - 0,785 \approx 0,322$.
- Le numérateur $e^x dx$ était exactement dt : c'est le signe que le changement de variable est le bon.

Réponse. $\arctan 2 - \frac{\pi}{4} \approx 0,322$.

Correction de l'exercice 5 - Sinus et cosinus échangés

Le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$ échange $\sin$ et $\cos$ et échange les bornes :

$$I = \int_{\pi/2}^0 \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} (-dt) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} dt = J$$

- Par ailleurs, $I + J = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}$.
- Donc $I = J = \frac{\pi}{4}$, sans avoir calculé de primitive.

Réponse. $I = J = \frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 6 - La règle du roi

Avec $x = \pi - t$: $\sin x = \sin t$, $\cos^2 x = \cos^2 t$, et les bornes s'échangent.

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt - I$$

- Donc $2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt$. Avec $u = \cos t$: cette intégrale vaut $\int_{-1}^1 \frac{du}{1 + u^2} = \frac{\pi}{2}$.
- $I = \frac{\pi^2}{4} \approx 2,467$. Le facteur x , gênant, a disparu grâce à la symétrie.

Réponse. $\frac{\pi^2}{4}$.

Correction de l'exercice 7 - Parité

Les deux intégrandes sont **impaires** (produit d'une fonction impaire par une fonction paire), sur un intervalle symétrique : les deux intégrales sont nulles.

- Justification : avec $x = -t$, si f est impaire,

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-t)(-dt) = \int_0^a f(-t) dt = - \int_0^a f(t) dt$$

- La partie sur $[-a; 0]$ compense exactement celle sur $[0; a]$.
- La seconde intégrande n'a pas de primitive usuelle : la symétrie est la seule méthode.

Réponse. 0 et 0 (intégrandes impaires).

Correction de l'exercice 8 - Périodicité

Soit $F(a) = \int_a^{a+T} f(x) dx$. En dérivant (théorème fondamental) :

$$F'(a) = f(a+T) - f(a) = 0$$

- F est constante sur $\mathbb{R}$: $F(a) = F(0) = \int_0^T f$.
- Application : $\cos^2$ est π -périodique, donc aussi 2π -périodique ;
 $\int_1^{1+2\pi} \cos^2 x dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \pi$.

Réponse. $F' = 0$; l'intégrale vaut π .

Correction de l'exercice 9 - La substitution $\tan(x/2)$

Avec $t = \tan \frac{x}{2}$: $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$; les bornes 0 et $\frac{\pi}{2}$ deviennent 0 et 1. Alors
 $2 + \cos x = \frac{3+t^2}{1+t^2}$, et

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x} = \int_0^1 \frac{2dt}{3+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan \frac{t}{\sqrt{3}} \right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\pi}{6}$$

- Résultat : $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0,605$.
- Cette substitution transforme toute fraction rationnelle en cos et sin en fraction rationnelle en t .

Réponse. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

Correction de l'exercice 10 - Une puissance et une racine

$du = -2x dx$ et $x^2 = 1 - u$; on écrit $x^3 dx = x^2 \times x dx = (1 - u) \times \left(-\frac{du}{2}\right)$. Les bornes 0 et 1 deviennent 1 et 0.

$$\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-u)\sqrt{u} du = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right) = \frac{2}{15}$$

- Le signe moins a été absorbé en remettant les bornes dans l'ordre croissant.

Réponse. $\frac{2}{15}$.

Correction de l'exercice 11 - Reconnaître un arcsinus

On se ramène à $\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ en posant $x = 2u$ ($dx = 2 du$, bornes 0 et $\frac{1}{2}$) :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int_0^{1/2} \frac{2 du}{2\sqrt{1-u^2}} = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

- En général : $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$ ($a > 0$).

Réponse. $\frac{\pi}{6}$.

Correction de l'exercice 12 - Échanger x et $1-x$

Avec $x = 1 - t$ (qui échange les bornes 0 et 1), $x^2(1-x)^5$ devient $(1-t)^2 t^5$: les intégrales sont égales.

- On développe la seconde : $x^5(1-x)^2 = x^5 - 2x^6 + x^7$.

$$\int_0^1 (x^5 - 2x^6 + x^7) dx = \frac{1}{6} - \frac{2}{7} + \frac{1}{8} = \frac{28-48+21}{168} = \frac{1}{168}$$

- C'était plus simple que de développer $(1-x)^5$. (Plus généralement,
 $\int_0^1 x^p (1-x)^q dx = \frac{p! q!}{(p+q+1)!}$.)

Réponse. $\frac{1}{168}$.

Correction de l'exercice 13 - L'erreur de bornes

Le remplacement $x dx = \frac{1}{2} du$ est juste, mais les **bornes** n'ont pas été changées : quand x va de 0 à 2, $u = x^2$ va de 0 à 4.

$$\int_0^2 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^4 e^u du = \frac{e^4 - 1}{2}$$

- Valeur : $\approx 26,8$, contre 3,2 pour la réponse fausse.
 — Règle : dans un changement de variable, on change **trois** choses : la fonction, le dx , et les bornes.

Réponse. $\frac{e^4 - 1}{2}$.

Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux ?

- a) **Vrai** : par la symétrie $x \mapsto \pi - x$, les deux moitiés sont égales ; les deux membres valent 2.
 b) **Faux** : $\frac{1}{x^2}$ n'est pas continue (ni même bornée) sur $[-1; 1]$; on ne peut pas appliquer la formule. Une intégrale de fonction positive ne peut d'ailleurs pas valoir -2 .
 c) **Vrai** : on coupe en $[0; \pi]$ et $[\pi; 2\pi]$; avec $x = t + \pi$ sur le second morceau, $\sin^{2027}(t + \pi) = -\sin^{2027} t$: les deux morceaux sont opposés.
 d) **Vrai** :

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(-t) dt = \int_0^a f(t) dt$$

Réponse. a) vrai · b) faux · c) vrai · d) vrai.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : une intégrale sans primitive

- a) $\tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right) = \frac{1 - \tan t}{1 + \tan t}$, donc

$$1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right) = \frac{1 + \tan t + 1 - \tan t}{1 + \tan t} = \frac{2}{1 + \tan t}$$

- b) Avec $x = \frac{\pi}{4} - t$ (les bornes s'échangent) : $I = \int_0^{\pi/4} \ln \frac{2}{1 + \tan t} dt = \int_0^{\pi/4} \ln 2 dt - I$.
 — Donc $2I = \frac{\pi}{4} \ln 2$, soit $I = \frac{\pi \ln 2}{8} \approx 0,272$.
 — La fonction $\ln(1 + \tan x)$ n'a pas de primitive usuelle : seule la symétrie permet ce calcul.

Réponse. $I = \frac{\pi \ln 2}{8}$.