

Plaquette 5 – Fonctions définies par une intégrale

Intégrale de Riemann – Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Théorème fondamental (f continue sur I , $a \in I$) :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \Rightarrow F \text{ dérivable sur } I \text{ et } F' = f$$

— Bornes variables (u, v dérivables) :

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$$

— $F(a) = 0$, et F hérite des propriétés de f : si $f \geq 0$, F est croissante ; si f est paire, F est impaire.

— Près de a : si $f(t) \sim g(t)$ avec g positive, alors $\int_a^x f \sim \int_a^x g$ (admis).

Correction de l'exercice 1 – Une fonction sans primitive explicite

— F est dérivable, $F'(x) = e^{-x^2} > 0$: strictement croissante. $F(0) = 0$.

— Parité : avec $t = -u$, $F(-x) = \int_0^{-x} e^{-t^2} dt = -\int_0^x e^{-u^2} du = -F(x)$: F est impaire.

— Majoration pour $x \geq 1$: sur $[1; x]$, $t^2 \geq t$, donc $e^{-t^2} \leq e^{-t}$:

$$F(x) \leq \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^x e^{-t} dt \leq 1 + e^{-1}$$

— Croissante et majorée, F a une limite finie en $+\infty$ (elle vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, résultat admis).

Réponse. Impaire, croissante, majorée par $1 + \frac{1}{e}$.

Correction de l'exercice 2 – Une fonction constante

— En dérivant (bornes variables) :

$$G'(x) = 2 \times \frac{1}{2x} - 1 \times \frac{1}{x} = 0$$

— G est constante sur l'intervalle $]0; +\infty[$, égale à $G(1) = \int_1^2 \frac{dt}{t} = \ln 2$.

— Directement : $G(x) = \ln(2x) - \ln x = \ln 2$.

— Interprétation : l'aire sous $\frac{1}{t}$ entre x et $2x$ ne dépend pas de x ; c'est la propriété qui fait de $\ln$ un logarithme.

Réponse. $G' = 0$; $G = \ln 2$.

Correction de l'exercice 3 – Une borne au carré

— Par la formule des bornes variables, avec $v(x) = x^2$:

$$H'(x) = 2x \sin(x^2)$$

— Directement : $H(x) = [-\cos t]_0^{x^2} = 1 - \cos(x^2)$, dont la dérivée est bien $2x \sin(x^2)$.

— Erreur fréquente : écrire $H'(x) = \sin(x^2)$, en oubliant le facteur $v'(x) = 2x$ de la dérivée d'une composée.

Réponse. $H'(x) = 2x \sin(x^2)$.

Correction de l'exercice 4 - Deux dérivations

On sépare les termes, car x apparaît dans l'intégrande :

$$\varphi(x) = x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt$$

— En dérivant le produit et la seconde intégrale :

$$\varphi'(x) = \int_0^x f(t) dt + x f(x) - x f(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

— Donc $\varphi''(x) = f(x)$, avec $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$.

— φ est la « double primitive » de f nulle en 0, ainsi que sa dérivée : pour $f = 1$, $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$.

Réponse. $\varphi' = \int_0^x f$; $\varphi'' = f$.

Correction de l'exercice 5 - Une limite de taux

— Avec $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$: $F(0) = 0$ et $\frac{F(x)}{x} = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \rightarrow F'(0) = e^0 = 1$.

— Pour la seconde, $\sin(t^2) = t^2 + o(t^2)$, donc en intégrant ce développement :

$$\int_0^x \sin(t^2) dt = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

— La limite vaut $\frac{1}{3}$. On peut aussi appliquer deux fois la règle du taux d'accroissement... le développement est plus direct.

Réponse. 1 ; $\frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 6 - Une équation intégrale

Analyse : le membre de droite est dérivable (théorème fondamental), donc f l'est aussi, et en dérivant :

$$f'(x) = f(x) \quad f(0) = 1 + 0 = 1$$

— Donc $f(x) = e^x$ (en dérivant $f(x)e^{-x}$, on obtient 0).

— **Synthèse** : $1 + \int_0^x e^t dt = 1 + e^x - 1 = e^x$: la fonction convient.

— L'unique solution est l'exponentielle. L'équation intégrale contient à la fois l'équation différentielle et la condition initiale.

Réponse. $f(x) = e^x$.

Correction de l'exercice 7 - Une équation avec une constante cachée

L'intégrale est un **nombre**, $c = \int_0^1 t f(t) dt$. Donc $f(x) = (1 + c)x$: f est linéaire.

— On reporte dans la définition de c :

$$c = \int_0^1 t(1 + c)t dt = \frac{1+c}{3} \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$$

— Donc $f(x) = \frac{3}{2}x$. Vérification : $\int_0^1 t \cdot \frac{3}{2}t dt = \frac{1}{2}$ et $x + \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}x$.

— Méthode : on nomme la constante cachée, on en déduit la forme de f , puis on résout une équation sur la constante.

Réponse. $f(x) = \frac{3}{2}x$.

Correction de l'exercice 8 - Le logarithme par l'intégrale

Par Chasles : $L(ab) = \int_1^a \frac{dt}{t} + \int_a^{ab} \frac{dt}{t} = L(a) + \int_a^{ab} \frac{dt}{t}$.

— Dans la seconde intégrale, on pose $t = au$ ($dt = a du$, bornes 1 et b) :

$$\int_a^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^b \frac{a du}{au} = L(b)$$

— Donc $L(ab) = L(a) + L(b)$: la propriété fondamentale du logarithme découle de cette définition intégrale.

Réponse. Chasles puis $t = au$.

Correction de l'exercice 9 - Deux bornes trigonométriques

Formule avec $u = \sin$, $v = \cos$ et $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$:

$$F'(x) = -\sin x \times \frac{1}{1+\cos^2 x} - \cos x \times \frac{1}{1+\sin^2 x}$$

— Avec la primitive : $F(x) = \arctan(\cos x) - \arctan(\sin x)$, dont la dérivée est la même.

— En $x = \frac{\pi}{4}$, les bornes sont égales : $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Réponse. $F'(x) = -\frac{\sin x}{1+\cos^2 x} - \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$.

Correction de l'exercice 10 - Développement d'une intégrale

On développe l'intégrande : $e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} + o(t^4)$, puis on intègre terme à terme (primitivation d'un DL) :

$$E(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^5)$$

— Contrôle : pour $x = 0,5$, on obtient $0,5 - 0,041\,67 + 0,003\,13 = 0,461\,46$; la valeur exacte est $0,461\,28$.

— C'est ainsi qu'on calcule en pratique la « fonction d'erreur » des probabilités.

Réponse. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^5)$.

Correction de l'exercice 11 - Convexité d'une primitive

$F'(x) = \ln(1+x^2) \geq 0$ et $F''(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

— $F'' \leq 0$ sur $] -\infty ; 0]$ (concave), $F'' \geq 0$ sur $[0 ; +\infty[$ (convexe) : 0 est un point d'inflexion.

— Tangente en 0 : $F(0) = 0$ et $F'(0) = 0$, donc $y = 0$. Près de 0 :

$$F(x) = \int_0^x (t^2 + o(t^2)) dt = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

— La courbe traverse sa tangente horizontale : au-dessous pour $x < 0$, au-dessus pour $x > 0$.

Réponse. Inflexion en 0, tangente $y = 0$, $F(x) \sim \frac{x^3}{3}$.

Correction de l'exercice 12 - Une intégrale à paramètre

Une primitive de $\frac{1}{x^2+a^2}$ est $\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$:

$$I(a) = \frac{1}{a} \arctan \frac{1}{a}$$

- Quand $a \rightarrow 0^+$, $\arctan \frac{1}{a} \rightarrow \frac{\pi}{2}$, donc $I(a) \sim \frac{\pi}{2a} \rightarrow +\infty$.
- Interprétation : l'intégrande se concentre près de 0, où il vaut $\frac{1}{a^2}$, sur une largeur de l'ordre de a : d'où un ordre de grandeur $\frac{1}{a}$.

Réponse. $I(a) = \frac{1}{a} \arctan \frac{1}{a} \sim \frac{\pi}{2a}$.

Correction de l'exercice 13 - Une intégrale positive qui s'annule

F est croissante ($F' = f \geq 0$), avec $F(0) = F(1) = 0$: elle est donc nulle sur $[0; 1]$ (car $0 \leq F(x) \leq F(1)$ pour $x \in [0; 1]$).

$$F = 0 \text{ sur } [0; 1] \Rightarrow f = F' = 0 \text{ sur } [0; 1]$$

- Aux bornes 0 et 1, on conclut par continuité de f .
- On retrouve le théorème de positivité stricte : une fonction continue positive d'intégrale nulle est nulle.

Réponse. F croissante, nulle en 0 et 1, donc $f = F' = 0$.

Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux ?

- Vrai** : théorème fondamental de l'analyse.
- Faux** : si f est paire, F est **impair** ($F(-x) = -F(x)$) ; par exemple $f = 1$ donne $F(x) = x$.
- Faux** : $f(t) = 1 + \cos t$ est périodique, mais $F(x) = x + \sin x$ ne l'est pas. C'est vrai si l'intégrale sur une période est nulle.
- Faux** : $\int_0^1 f$ est un nombre, dont la dérivée par rapport à x est nulle.

$$\frac{d}{dx} \int_0^1 f(t) dt = 0$$

Réponse. a) vrai · b) faux · c) faux · d) faux.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : une intégrale entre x et $2x$

- Bornes variables : $F'(x) = 2 \cdot \frac{e^{-2x}}{2x} - \frac{e^{-x}}{x} = \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x} < 0$: F est strictement décroissante.
- Sur $[x; 2x]$, $e^{-2x} \leq e^{-t} \leq e^{-x}$; en multipliant par $\frac{1}{t} > 0$ et en intégrant, avec $\int_x^{2x} \frac{dt}{t} = \ln 2$:

$$e^{-2x} \ln 2 \leq F(x) \leq e^{-x} \ln 2$$

- Par encadrement : $F(x) \rightarrow \ln 2$ quand $x \rightarrow 0^+$, et $F(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Réponse. a) décroissante · c) $\ln 2$ en 0^+ , 0 en $+\infty$.