

## Plaquette 2 - Primitives et intégration par parties

### Intégrale de Riemann — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

#### Boîte à outils

**Intégration par parties** ( $u, v$  de classe  $C^1$  sur  $[a; b]$ ) :

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

- On **dérive** ce qui se simplifie ( $x^n, \ln x, \arctan x$ ) et on **primitive** ce qui reste stable ( $e^x, \sin, \cos, 1$ ).
- Primitives utiles :  $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$  ;  $\int \frac{u'}{u} = \ln |u|$  ;  $\int \tan = -\ln |\cos|$ .
- Linéarisation :  $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ ,  $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ .
- Éléments simples :  $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$ .

#### Correction de l'exercice 1 - Deux intégrations par parties

On dérive  $x^2$  (qui se simplifie) et on primitive  $e^x$  :

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = [x^2 e^x]_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx = e - 2 \int_0^1 x e^x dx$$

- Deuxième IPP :  $\int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1$ .
- Donc  $\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2 \approx 0,718$ .
- Une primitive de  $x^2 e^x$  est  $(x^2 - 2x + 2)e^x$  : on vérifie en dérivant.

**Réponse.**  $e - 2$ .

#### Correction de l'exercice 2 - Exponentielle et cosinus

On primitive  $e^x$  deux fois et on dérive le cosinus :

$$- I = [e^x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi e^x \sin x dx = (-e^\pi - 1) + J.$$

$$- J = [e^x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x dx = 0 - I.$$

$$I = -e^\pi - 1 - I \Rightarrow I = -\frac{e^\pi + 1}{2} \approx -12,07$$

- On retrouve l'intégrale de départ : on obtient une **équation** en  $I$  plutôt qu'une valeur directe. (Avec les complexes :  $e^x \cos x = \operatorname{Re} e^{(1+i)x}$ .)

**Réponse.**  $I = -\frac{e^\pi + 1}{2}$ .

#### Correction de l'exercice 3 - Le carré du logarithme

On écrit  $(\ln x)^2 = 1 \times (\ln x)^2$  : on primitive 1 et on dérive  $(\ln x)^2$ , de dérivée  $\frac{2 \ln x}{x}$ .

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx = [x(\ln x)^2]_1^e - 2 \int_1^e \ln x dx$$

- Le crochet vaut  $e$  ; et  $\int_1^e \ln x dx = [x \ln x - x]_1^e = 0 - (-1) = 1$ .
- Résultat :  $e - 2 \approx 0,718$ .

— L'astuce « écrire  $1 \times f$  » sert pour toutes les fonctions faciles à dériver mais pas à primitiver :  $\ln$ ,  $\arctan$ ,  $\arcsin$ .

**Réponse.**  $e - 2$ .

### Correction de l'exercice 4 - Intégrer l'arctangente

— Avec  $1 \times \arctan x$  :  $\int_0^1 \arctan x \, dx = [x \arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$ .

— Pour le second, on primitive  $x$  en  $\frac{x^2}{2}$  :

$$\int_0^1 x \arctan x \, dx = \left[ \frac{x^2}{2} \arctan x \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \, dx$$

— Or  $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$ , d'intégrale  $1 - \frac{\pi}{4}$  sur  $[0; 1]$ . Résultat :

$$\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \approx 0,285.$$

**Réponse.**  $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$  ;  $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ .

### Correction de l'exercice 5 - Les intégrales de Wallis

On écrit  $\sin^{n+2} x = \sin^{n+1} x \times \sin x$  et on intègre par parties (on primitive  $\sin x$  en  $-\cos x$ ) :

$$W_{n+2} = [-\cos x \sin^{n+1} x]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^n x \, dx$$

— Le crochet est nul ; avec  $\cos^2 = 1 - \sin^2$  :  $W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2})$ , d'où  $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$ .

—  $W_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $W_1 = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1$ ,  $W_2 = \frac{1}{2} W_0 = \frac{\pi}{4}$ ,  $W_3 = \frac{2}{3}$ ,  $W_4 = \frac{3}{4} W_2 = \frac{3\pi}{16}$ .

**Réponse.**  $W_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $W_1 = 1$ ,  $W_2 = \frac{\pi}{4}$ ,  $W_3 = \frac{2}{3}$ ,  $W_4 = \frac{3\pi}{16}$ .

### Correction de l'exercice 6 - Une récurrence avec l'exponentielle

IPP en dérivant  $x^n$  et en primitivant  $e^x$  :

$$I_n = [x^n e^x]_0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} e^x \, dx = e - n I_{n-1}$$

—  $I_0 = e - 1$  ;  $I_1 = e - (e - 1) = 1$  ;  $I_2 = e - 2$  ;  $I_3 = e - 3(e - 2) = 6 - 2e \approx 0,563$ .

— On retrouve  $I_2 = e - 2$  du premier exercice.

— Attention : numériquement, cette récurrence amplifie les erreurs d'arrondi (multiplication par  $n$ ) ; on la calcule en valeurs exactes.

**Réponse.**  $I_0 = e - 1$ ,  $I_1 = 1$ ,  $I_2 = e - 2$ ,  $I_3 = 6 - 2e$ .

### Correction de l'exercice 7 - Une IPP simple

On dérive  $x$  et on primitive la fonction trigonométrique.

$$\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx = [-x \cos x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = 0 + 1 = 1$$

—  $\int_0^{\pi} x \cos x \, dx = [x \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 0 - 2 = -2$ .

— Le signe négatif s'explique :  $x \cos x$  est négative sur  $]\frac{\pi}{2}; \pi]$ , où  $x$  est plus grand.

**Réponse.**  $1$  ;  $-2$ .

### Correction de l'exercice 8 - Linéariser pour intégrer

—  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ , donc  $\int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \left[ \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$ .

—  $\sin^4 x = \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x}{4}$ , et  $\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$  :

$$\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$$

— Sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , les cosinus s'intègrent à 0 :  $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \, dx = \frac{3}{8} \times \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}$ , en accord avec  $W_4$ .

**Réponse.**  $\frac{\pi}{2}$  ;  $\frac{3\pi}{16}$ .

### Correction de l'exercice 9 - Une puissance impaire

On isole un  $\sin x$  et on exprime le reste en cosinus :

$$\sin^3 x = \sin x (1 - \cos^2 x) = \sin x - \sin x \cos^2 x.$$

—  $\sin x \cos^2 x = -\left(\frac{\cos^3 x}{3}\right)'$  (dérivée d'une composée) :

$$\int_0^\pi \sin^3 x \, dx = \left[ -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} \right]_0^\pi = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

— Méthode pour  $\sin^{2k+1}$  : on garde un facteur  $\sin$  et on pose mentalement  $u = \cos x$ .

**Réponse.**  $\frac{4}{3}$ .

### Correction de l'exercice 10 - Une astuce de réécriture

On fait apparaître une dérivée logarithmique en ajoutant et retranchant  $e^x$  au numérateur :

$$\frac{1}{1 + e^x} = \frac{1 + e^x - e^x}{1 + e^x} = 1 - \frac{e^x}{1 + e^x}$$

— Une primitive est  $x - \ln(1 + e^x)$ , donc l'intégrale vaut

$$1 - \ln(1 + e) + \ln 2 = 1 + \ln \frac{2}{1 + e} \approx 0,380.$$

— Autre méthode : multiplier numérateur et dénominateur par  $e^{-x}$ , ce qui donne  $\frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}$ , de primitive  $-\ln(1 + e^{-x})$ .

**Réponse.**  $1 + \ln \frac{2}{1 + e} \approx 0,380$ .

### Correction de l'exercice 11 - Éléments simples

— Décomposition :  $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$  (on vérifie en réduisant au même dénominateur).

$$\int_2^3 \frac{dx}{x(x-1)} = \left[ \ln \frac{x-1}{x} \right]_2^3 = \ln \frac{2}{3} - \ln \frac{1}{2} = \ln \frac{4}{3}$$

— Pour la seconde :  $\int \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2}$ , donc  $\int_0^2 = \frac{1}{2} \arctan 1 = \frac{\pi}{8}$ .

— Un dénominateur qui se factorise donne des logarithmes ; un dénominateur sans racine réelle donne une arctangente.

**Réponse.**  $\ln \frac{4}{3}$  ;  $\frac{\pi}{8}$ .

## Correction de l'exercice 12 - Tangente et tangente au carré

—  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{(\cos x)'}{\cos x}$  : une primitive est  $-\ln |\cos x|$ .

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx = -\ln \cos \frac{\pi}{4} = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\ln 2}{2}$$

—  $\tan^2 x = (1 + \tan^2 x) - 1 = \tan'(x) - 1$  :  $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x \, dx = [\tan x - x]_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0,215$ .

— Retenir :  $1 + \tan^2$  est la dérivée de  $\tan$ .

**Réponse.**  $\frac{\ln 2}{2}$  ;  $1 - \frac{\pi}{4}$ .

## Correction de l'exercice 13 - Choisir quoi dériver

En primitivant  $\ln x$  (en  $x \ln x - x$ ) et en dérivant  $x$  (en 1), on obtient  $\int (x \ln x - x) \, dx$  : l'intégrale n'est pas plus simple, elle contient encore  $x \ln x$ .

— Il faut au contraire **dériver**  $\ln x$  (qui devient  $\frac{1}{x}$ ) et **primitiver**  $x$  :

$$\int_1^2 x \ln x \, dx = \left[ \frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$$

— Résultat :  $2 \ln 2 - \frac{3}{4} \approx 0,636$ . Règle : on dérive ce qui se simplifie.

**Réponse.**  $2 \ln 2 - \frac{3}{4}$ .

## Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux ?

a) **Faux** : avec  $f = g = x$ , le membre de gauche vaut  $\frac{1}{3}$ , le droit  $\frac{1}{4}$ .

b) **Vrai** : pour  $x < 0$ ,  $(\ln(-x))' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$ .

c) **Faux** :  $\mathbb{R}^*$  n'est pas un intervalle ; les constantes peuvent différer sur  $] -\infty ; 0[$  et  $]0 ; +\infty[$ .

d) **Vrai** : c'est le théorème fondamental de l'analyse.

$$\int_a^b f(x) \, dx = [f(x)]_a^b$$

**Réponse.** a) faux · b) vrai · c) faux · d) vrai.

## Correction de l'exercice 15 - Synthèse : puissance fois logarithme

a) On dérive  $\ln x$  et on primitive  $x^n$  en  $\frac{x^{n+1}}{n+1}$  :

$$J_n = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x} \, dx = 0 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^n \, dx = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

— (le crochet vaut 0 en 1 car  $\ln 1 = 0$ , et en 0 car  $x^{n+1} \ln x \rightarrow 0$ ).

— b)  $J_n = -\frac{1}{(n+1)^2} \rightarrow 0$ , et  $J_n \sim -\frac{1}{n^2}$ .

— Contrôle pour  $n = 0$  :  $\int_0^1 \ln x \, dx = [x \ln x - x]_0^1 = -1$ .

**Réponse.** a)  $J_n = -\frac{1}{(n+1)^2}$  · b)  $J_n \rightarrow 0$ ,  $J_n \sim -\frac{1}{n^2}$ .