

Plaque 4 - Sommes de Riemann, encadrements et approximations

Intégrale de Riemann — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Sommes de Riemann (f continue sur $[0; 1]$) :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx$$

- Croissance : si $f \leq g$ sur $[a; b]$ ($a \leq b$), alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
- Positivité stricte : si f est continue, positive, et $\int_a^b f = 0$, alors $f = 0$ sur $[a; b]$.
- Inégalité de la moyenne : $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq (b-a) \max |f|$.
- Comparaison série-intégrale (f décroissante) : $\int_k^{k+1} f \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f$.
- Trapèzes : $\int_a^b f \approx h \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right)$, $h = \frac{b-a}{n}$.

Correction de l'exercice 1 - Une somme qui tend vers $\ln 2$

On factorise par $\frac{1}{n}$ pour faire apparaître $\frac{k}{n}$:

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$$

— C'est une somme de Riemann de $f(x) = \frac{1}{1+x}$, continue sur $[0; 1]$. Donc

$$S_n \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2.$$

— Contrôle numérique : pour $n = 1\,000$, $S_n \approx 0,69290$, et $\ln 2 \approx 0,69315$.

Réponse. $\ln 2$.

Correction de l'exercice 2 - Une somme qui tend vers $\pi/4$

On divise numérateur et dénominateur par n^2 :

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{\frac{1}{n}}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

— Somme de Riemann de $\frac{1}{1+x^2}$: $T_n \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

— Cette somme donne donc une méthode (lente) pour approcher π : $4T_{1000} \approx 3,1406$.

Réponse. $\frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 3 - La moyenne d'un sinus

C'est une somme de Riemann de $f(x) = \sin(\pi x)$ sur $[0; 1]$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left(\pi \frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sin(\pi x) dx = \left[-\frac{\cos(\pi x)}{\pi} \right]_0^1 = \frac{2}{\pi}$$

- $\frac{2}{\pi} \approx 0,637$ est la **valeur moyenne** de $\sin$ sur une demi-période : c'est, en électricité, le rapport entre la valeur moyenne d'un courant redressé et sa valeur maximale.

Réponse. $\frac{2}{\pi}$.

Correction de l'exercice 4 - Racine n-ième de $n!/n^n$

On passe au logarithme pour transformer le produit en somme :

$$\ln u_n = \frac{1}{n} \ln \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{k}{n}$$

- C'est une somme de Riemann de $\ln$ sur $]0; 1]$. La fonction n'est pas continue en 0, mais on admet la convergence (l'intégrale $\int_0^1 \ln x \, dx = [x \ln x - x]_0^1 = -1$ existe et $\ln$ est monotone).
- Donc $\ln u_n \rightarrow -1$ et $u_n \rightarrow \frac{1}{e}$.
- Conséquence : $n!$ est de l'ordre de $(\frac{n}{e})^n$, comme le précise la formule de Stirling.

Réponse. $\frac{1}{e}$.

Correction de l'exercice 5 - Encadrer la série harmonique

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante : sur $[k; k+1]$, $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$, et sur $[k-1; k]$, $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{k}$. En intégrant :

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x} \quad (k \geq 2 \text{ pour la seconde})$$

- On somme la première pour $k = 1$ à n : $\ln(n+1) \leq H_n$. On somme la seconde pour $k = 2$ à n et on ajoute 1 : $H_n \leq 1 + \ln n$.
- Conséquences : $H_n \rightarrow +\infty$ et $H_n \sim \ln n$. Pour $n = 100$: $4,62 \leq H_{100} \approx 5,19 \leq 5,61$.

Réponse. Comparaison série-intégrale ; $H_n \sim \ln n$.

Correction de l'exercice 6 - Somme des racines

On factorise par $n^{1/2}$ puis par n :

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} = n^{3/2} \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}}$$

- La somme de Riemann tend vers $\int_0^1 \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3}$. Donc $\frac{1}{n^{3/2}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \rightarrow \frac{2}{3}$, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \sim \frac{2}{3} n^{3/2}$.
- Contrôle : pour $n = 10\,000$, le rapport vaut 1,000 07.

Réponse. $\frac{1}{n^{3/2}} \sum \sqrt{k} \rightarrow \int_0^1 \sqrt{x} = \frac{2}{3}$.

Correction de l'exercice 7 - Une intégrale qui tend vers 0

Sur $[0; 1]$: $1 \leq 1+x$, donc $0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$. Par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$$

- Par encadrement, $I_n \rightarrow 0$.
- On ne sait pas calculer I_n simplement, mais un encadrement suffit pour la limite. (On montre aussi que $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, d'où $I_n \sim \frac{1}{2n}$.)

Réponse. $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$; $I_n \rightarrow 0$.

Correction de l'exercice 8 - Encadrer une intégrale sans primitive

— Minoration : $e^u \geq 1 + u$ pour tout u , donc $e^{x^2} \geq 1 + x^2$ et

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \geq \int_0^1 (1 + x^2) dx = \frac{4}{3}$$

— Majoration : sur $[0; 1]$, $x^2 \leq x$, donc $e^{x^2} \leq e^x$ et $\int_0^1 e^{x^2} \leq \int_0^1 e^x = e - 1 \approx 1,718$.

— Valeur numérique : $\approx 1,4627$, bien entre 1,333 et 1,718. e^{x^2} n'a pas de primitive exprimable avec les fonctions usuelles.

Réponse. $\frac{4}{3} \leq I \leq e - 1$ ($I \approx 1,463$).

Correction de l'exercice 9 - Positivité stricte

f^2 est continue et positive. **Par l'absurde**, supposons $f(x_0)^2 = c > 0$ en un point x_0 . Par continuité, $f^2 \geq \frac{c}{2}$ sur un petit intervalle $[\alpha; \beta]$ de longueur $\ell > 0$ autour de x_0 ; alors

$$\int_0^1 f^2 \geq \int_\alpha^\beta f^2 \geq \frac{c}{2} \ell > 0$$

— contradiction. Donc $f^2 = 0$, c'est-à-dire $f = 0$.

— Sans continuité, c'est faux : la fonction qui vaut 1 en $\frac{1}{2}$ et 0 ailleurs est d'intégrale nulle sans être nulle.

Réponse. Continuité : $f^2 \geq \frac{c}{2}$ près de x_0 donnerait une intégrale > 0 .

Correction de l'exercice 10 - La méthode des trapèzes

Avec $h = 0,25$ et $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$: $f(0) = 1$, $f(0,25) \approx 0,9412$, $f(0,5) = 0,8$, $f(0,75) = 0,64$, $f(1) = 0,5$.

$$T = 0,25 \left(\frac{1}{2} + 0,9412 + 0,8 + 0,64 + \frac{0,5}{2} \right) \approx 0,7828$$

— Valeur exacte : $\frac{\pi}{4} \approx 0,7854$; erreur $\approx 0,0026$.

— On en tire $\pi \approx 4T \approx 3,131$. En doublant le nombre d'intervalles, l'erreur est divisée par environ 4 (méthode d'ordre 2).

Réponse. $T \approx 0,7828$; erreur $\approx 0,0026$.

Correction de l'exercice 11 - Le théorème de la moyenne

Par le théorème des bornes atteintes, $m \leq f \leq M$ sur $[a; b]$, avec m et M atteints. En intégrant :

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq M$$

— La valeur moyenne est entre m et M : par le TVI, elle est atteinte en un point c .

— Application : $\frac{1}{3} \int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{3} \times 9 = 3$, et $c^2 = 3$ donne $c = \sqrt{3} \approx 1,73 \in [0; 3]$.

Réponse. Bornes atteintes + TVI ; $c = \sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 12 - Majorer une intégrale

- Par l'inégalité de la moyenne : $\left| \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{1+x} dx \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{|\sin x|}{1+x} dx \leq \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+x} = \ln(1+2\pi)$.
- Signe : on coupe en $[0; \pi]$ et $[\pi; 2\pi]$; avec $x = t + \pi$ sur le second morceau,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{1+x} dx = \int_0^{\pi} \sin t \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+\pi} \right) dt$$

- L'intégrande est positive sur $[0; \pi]$: l'intégrale est positive. La bosse positive, plus proche de 0, pèse davantage que la bosse négative.

Réponse. Majoration par $\int \frac{1}{1+x}$; positive par symétrie.

Correction de l'exercice 13 - Somme des carrés

- Somme de Riemann : $\frac{1}{n^3} \sum k^2 = \frac{1}{n} \sum \left(\frac{k}{n} \right)^2 \rightarrow \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.
- Formule exacte :

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6} \rightarrow \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- Les deux méthodes concordent. La somme de Riemann donne la limite sans connaître la formule, ce qui est précieux pour $\sum k^{3/2}$ par exemple.

Réponse. $\frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux ?

- Faux** : $\int_{-1}^2 x dx = \frac{3}{2} \geq 0$, mais $x < 0$ sur $[-1; 0[$.
- Vrai** : croissance de l'intégrale.
- Vrai** : elles diffèrent de $\frac{f(1)-f(0)}{n} \rightarrow 0$.
- Vrai** : si elle ne s'annulait pas, elle garderait un signe constant (TVI) et son intégrale serait non nulle ; c'est aussi le théorème de la moyenne, $f(c) = 0$.

$$\int_a^b f = (b-a)f(c) = 0 \Rightarrow f(c) = 0$$

Réponse. a) faux · b) vrai · c) vrai · d) vrai.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : un produit infini

On passe au logarithme :

$$\ln P_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(1+x) dx$$

- Par parties (ou avec la primitive $(1+x)\ln(1+x) - x$) : $\int_0^1 \ln(1+x) dx = 2\ln 2 - 1$.
- Donc $P_n \rightarrow e^{2\ln 2 - 1} = \frac{4}{e} \approx 1,472$.
- Méthode : un produit se transforme en somme par le logarithme, puis la somme en intégrale par Riemann.

Réponse. $\frac{4}{e}$.