

**Plaquette 1 - Sommes de Riemann, primitives,  
intégration par parties et changement de variable**  
**Intégrale de Riemann — Licence 1 (L1)**  
Corrections détaillées

**Boîte à outils**

**Construction.** Pour  $f$  continue sur  $[a; b]$ , les **sommes de Riemann**

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$$

**Théorème fondamental.** Si  $f$  est continue sur  $I$  et  $a \in I$ , alors  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  est **dérivable** avec  $F' = f$ . Réciproquement, si  $F$  est **une** primitive de  $f$ ,

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

**Primitives usuelles** (à constante près).

$$\int x^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1) \quad \int \frac{dx}{x} = \ln |x| \quad \int e^x = e^x$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \quad \int \tan x = -\ln |\cos x|$$

**Formes composées :**  $\int u' u^\alpha = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ ,  $\int \frac{u'}{u} = \ln |u|$ ,  $\int u' e^u = e^u$ .

**Techniques.**

- **IPP** :  $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$  — pour les produits polynôme  $\times$  (ln, exp, trigo).
- **Changement de variable** :  $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du$  — **ne pas oublier de changer les bornes.**

**Propriétés.**

- **Linéarité, Chasles, positivité** ( $f \geq 0 \Rightarrow \int f \geq 0$ ), **croissance**.
- $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq (b-a) \sup |f|$ .
- **Valeur moyenne** :  $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$ ; elle est **atteinte** si  $f$  est continue.
- **Parité** :  $\int_{-a}^a f = 0$  si  $f$  impaire,  $= 2 \int_0^a f$  si  $f$  paire.

**Correction de l'exercice 1 - Primitives immédiates**

a) Une primitive est  $x^3 - \ln x$  (pour  $x > 0$ ) :

$$\left[ x^3 - \ln x \right]_1^2 = (8 - \ln 2) - (1 - 0) = 7 - \ln 2 \approx 6,307$$

b) On reconnaît  $\frac{1}{2} \times \frac{u'}{u}$  avec  $u = x^2 + 1$  :

$$\left[ \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2 \approx 0,347$$

- **Contrôle de a)** : sur  $[1; 2]$ ,  $3x^2 - \frac{1}{x}$  varie de 2 à 11,5 ; une aire d'environ 6,3 est plausible ✓
- **Contrôle de b)** : l'intégrande varie de 0 à 0,5, d'où une aire  $< 0,5$  ✓
- **Réflexe** : chercher systématiquement une forme composée  $\frac{u'}{u}$ ,  $u'u^\alpha$  ou  $u'e^u$  avant de se lancer dans un calcul lourd.

**Réponse.** a)  $7 - \ln 2 \approx 6,31$  · b)  $\frac{\ln 2}{2} \approx 0,347$ .

### Correction de l'exercice 2 - Intégration par parties

- **Choix** :  $u' = e^x$  (donc  $u = e^x$ ) et  $v = x$  (donc  $v' = 1$ ).

$$\int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1$$

- **Contrôle** : l'intégrande varie de 0 à  $e \approx 2,72$  sur  $[0; 1]$  ; une aire de 1 est cohérente ✓
- **Choix du découpage** : on dérive le **polynôme** (qui se simplifie) et on primitive l'exponentielle (qui ne change pas).
- **Erreur classique** : prendre  $v = e^x$  donnerait  $\int \frac{x^2}{2} e^x$  — **plus compliqué** que l'intégrale de départ.
- **Généralisation** :  $\int_0^1 x^n e^x dx$  se calcule par  $n$  IPP successives.

**Réponse.** L'intégrale vaut 1.

### Correction de l'exercice 3 - IPP avec logarithme

- **Choix** :  $u' = x$  (donc  $u = \frac{x^2}{2}$ ) et  $v = \ln x$  (donc  $v' = \frac{1}{x}$ ).

$$\int_1^e x \ln x dx = \left[ \frac{x^2 \ln x}{2} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx$$

- **Premier terme** :  $\frac{e^2}{2} - 0 = \frac{e^2}{2}$ .

- **Second** :  $\left[ \frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2 - 1}{4}$ .

- **Résultat** :

$$\frac{e^2}{2} - \frac{e^2 - 1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4} \approx 2,097$$

- **Contrôle** : sur  $[1; e]$  (largeur 1,718), l'intégrande varie de 0 à  $e \approx 2,718$  ; une aire de 2,1 est plausible ✓
- **Règle** : avec un  $\ln$ , on le prend **toujours** comme le facteur à dériver — sa dérivée  $\frac{1}{x}$  simplifie l'expression.

**Réponse.**  $\frac{e^2 + 1}{4} \approx 2,097$ .

### Correction de l'exercice 4 - Changement de variable affine

- **Changement** :  $u = 3x + 1$ , donc  $du = 3 dx$  et  $dx = \frac{du}{3}$ .

- **Nouvelles bornes** :  $x = 0 \Rightarrow u = 1$  ;  $x = 1 \Rightarrow u = 4$ .

$$\int_0^1 e^{3x+1} dx = \frac{1}{3} \int_1^4 e^u du = \frac{e^4 - e}{3}$$

- **Valeur numérique** :  $\frac{54,598 - 2,718}{3} \approx 17,293$ .
- **Vérification directe** : une primitive est  $\frac{e^{3x+1}}{3}$ , et  $\left[ \frac{e^{3x+1}}{3} \right]_0^1 = \frac{e^4 - e}{3} \checkmark$
- **Contrôle d'ordre de grandeur** : l'intégrande croît de  $e \approx 2,7$  à  $e^4 \approx 54,6$  ; une aire de 17 est cohérente pour une croissance exponentielle  $\checkmark$
- **Point de méthode** : pour un changement **affine**, la primitive directe est souvent plus rapide, mais le changement de variable évite les erreurs de coefficient.

**Réponse.**  $\frac{e^4 - e}{3} \approx 17,29$ .

### Correction de l'exercice 5 - Changement de variable trigonométrique

- **Reconnaissance directe** : une primitive de  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  est  $\arcsin x$ .
- $$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_0^{1/2} = \frac{\pi}{6} \approx 0,5236$$
- **Par changement de variable** :  $x = \sin t$  avec  $t \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ , donc  $dx = \cos t dt$  et  $\sqrt{1 - \sin^2 t} = \cos t > 0$ .
  - L'intégrale devient  $\int_0^{\pi/6} dt = \frac{\pi}{6} \checkmark$  — même résultat.
  - **Contrôle** : l'intégrande varie de 1 à  $\frac{1}{\sqrt{0,75}} \approx 1,155$  sur un intervalle de largeur 0,5 ; l'aire est donc entre 0,5 et 0,58  $\checkmark$
  - **Interprétation géométrique** : c'est la longueur de l'arc de cercle unité correspondant, soit l'angle  $\frac{\pi}{6}$ .

**Réponse.**  $\frac{\pi}{6} \approx 0,524$ .

### Correction de l'exercice 6 - Somme de Riemann

- **Reconnaissance** : la somme est  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$  avec  $f(x) = \sqrt{x}$ , continue sur  $[0; 1]$ .
  - C'est une **somme de Riemann** sur  $[0; 1]$  avec le pas  $\frac{1}{n}$ .
  - **Limite** :
- $$\int_0^1 \sqrt{x} dx = \left[ \frac{2x^{3/2}}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \approx 0,6667$$
- **Contrôle** : pour  $n = 10$ , la somme vaut 0,7105 ; pour  $n = 100$ , 0,6715 — la convergence est lente, la dérivée de  $\sqrt{x}$  étant infinie en 0.
  - **Signe de reconnaissance** : la présence de  $\frac{1}{n}$  **en facteur** et de  $\frac{k}{n}$  **dans la fonction** est la signature d'une somme de Riemann.
  - **Variante** :  $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$  se traite de même et donne  $\frac{\pi}{4}$ .

**Réponse.** La limite vaut  $\frac{2}{3}$ .

### Correction de l'exercice 7 - Parité et symétrie

- **Première intégrale** :  $x^3 + x$  est **impaire** et l'intervalle est **symétrique**, donc l'intégrale est **nulle**.

— **Seconde** :  $x^2$  est **paire**, donc

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

— **Justification** : le changement  $x \mapsto -x$  transforme  $\int_{-a}^0 f$  en  $\int_0^a f(-u) du$ , égal à  $\mp \int_0^a f$  selon la parité.

— **Vérification de la première** : une primitive est  $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$ , **paire**, donc elle prend la même valeur en  $-2$  et  $2$  ✓

— **Réflexe à acquérir** : vérifier la **parité** avant tout calcul sur un intervalle symétrique — cela fait gagner beaucoup de temps.

**Réponse.** 0 (impaire) et  $\frac{2}{3}$  (paire).

### Correction de l'exercice 8 - Inégalités intégrales

— **Encadrement de l'intégrande** : pour  $x \in [0; 1]$ ,  $1 \leq 1 + x^4 \leq 2$ , donc

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1 + x^4} \leq 1$$

— Par **croissance** de l'intégrale sur un intervalle de largeur 1 :

$$0,5 \leq I \leq 1$$

— **Encadrement affiné** : comme  $x^4 \leq x^2$  sur  $[0; 1]$ , on a  $\frac{1}{1 + x^4} \geq \frac{1}{1 + x^2}$ , donc  $I \geq \frac{\pi}{4} \approx 0,785$ .

— **Valeur numérique** :  $I \approx 0,8669$  — bien dans  $[0,785; 1]$  ✓

— **Leçon** : un premier encadrement grossier se raffine en comparant à une fonction dont la primitive est connue.

— **Remarque** : la primitive exacte existe (décomposition en éléments simples avec des facteurs  $x^2 \pm \sqrt{2}x + 1$ ) mais le calcul est lourd — l'encadrement suffit souvent.

**Réponse.**  $\frac{\pi}{4} \approx 0,785 \leq I \leq 1$ , avec  $I \approx 0,867$ .

### Correction de l'exercice 9 - Valeur moyenne

— **Définition** :  $\mu = \frac{1}{3-0} \int_0^3 x^2 dx$ .

— **Calcul** :  $\int_0^3 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 9$ , donc  $\mu = \frac{9}{3} = 3$ .

— **Point où elle est atteinte** : on résout  $x^2 = 3$ , soit  $x = \sqrt{3} \approx 1,732$  (dans  $[0; 3]$  ✓).

— **Théorème de la moyenne** :  $f$  étant **continue**, la valeur moyenne est toujours atteinte — c'est ce que garantit le TVI appliqué entre le min et le max.

— **Contrôle** :  $\mu = 3$  est bien entre  $f(0) = 0$  et  $f(3) = 9$  ✓

— **Interprétation** : le rectangle de base  $[0; 3]$  et de hauteur 3 a la **même aire** (9) que la région sous la parabole.

— **Remarque** :  $\sqrt{3} \approx 1,73$  est plus proche de 3 que de 0 — la fonction croissant vite, la « moyenne » se situe dans la seconde moitié.

**Réponse.**  $\mu = 3$ , atteinte en  $x = \sqrt{3} \approx 1,73$ .

## Correction de l'exercice 10 - Fonction définie par une intégrale

- **Dérivabilité** : par le théorème fondamental,  $F'(x) = \frac{1}{x}$  et  $F(1) = 0$  — c'est la définition **intégrale** du logarithme.
- **Méthode par dérivation** : fixons  $y > 0$  et posons  $g(x) = F(xy) - F(x)$ .

$$g'(x) = y \times \frac{1}{xy} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

- $g$  est donc **constante** sur  $]0; +\infty[$ .
- **Valeur de la constante** :  $g(1) = F(y) - F(1) = F(y)$ .
- **Conclusion** :  $F(xy) - F(x) = F(y)$ , soit  $F(xy) = F(x) + F(y)$  ✓
- **Méthode alternative** : le changement de variable  $t = yu$  dans  $\int_x^{xy} \frac{dt}{t}$  donne  $\int_1^y \frac{du}{u} = F(y)$ .
- **Portée** : cette propriété **caractérise** le logarithme, et permet de le construire sans passer par l'exponentielle.

**Réponse.** Dériver  $g(x) = F(xy) - F(x)$  :  $g' = 0$  et  $g(1) = F(y)$ .

## Correction de l'exercice 11 - Intégrale d'une fraction rationnelle

- **Factorisation** :  $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$ .
- **Décomposition en éléments simples** :  $\frac{x}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x + 2}$ .
- $a = \left[ \frac{x}{x + 2} \right]_{x = -1} = \frac{-1}{1} = -1$  ;  $b = \left[ \frac{x}{x + 1} \right]_{x = -2} = \frac{-2}{-1} = 2$ .
- **Contrôle** en  $x = 0$  :  $-1 + 1 = 0$  ✓ (l'intégrande vaut bien 0).
- **Primitive** :  $-\ln(x + 1) + 2\ln(x + 2)$ .
- **Évaluation** :  

$$[-\ln(x + 1) + 2\ln(x + 2)]_0^1 = (-\ln 2 + 2\ln 3) - (0 + 2\ln 2) = 2\ln 3 - 3\ln 2$$
- **Valeur numérique** :  $2 \times 1,0986 - 3 \times 0,6931 \approx 2,1972 - 2,0794 = 0,1178$ .
- **Contrôle** : l'intégrande varie de 0 à  $\frac{1}{6} \approx 0,167$  ; une aire de 0,12 est cohérente ✓

**Réponse.**  $2\ln 3 - 3\ln 2 \approx 0,118$ .

## Correction de l'exercice 12 - Récurrence intégrale

- **IPP** avec  $u' = e^x$  et  $v = x^n$  :

$$I_n = [x^n e^x]_0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} e^x dx = e - nI_{n-1}$$

- **Valeur initiale** :  $I_0 = \int_0^1 e^x dx = e - 1$ .
- **Calculs successifs** :
- $I_1 = e - 1 \times (e - 1) = 1$  ✓ (retrouvé plus haut) ;
- $I_2 = e - 2 \times 1 = e - 2 \approx 0,718$ .
- **Contrôle** :  $I_2 < I_1$ , ce qui est logique puisque  $x^2 \leq x$  sur  $[0; 1]$  ✓
- **Comportement** :  $I_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$  (l'intégrande tend vers 0 sauf en 1), et la relation donne  $I_n \sim \frac{e}{n}$ ... plus précisément  $nI_{n-1} = e - I_n \rightarrow e$ .
- **Méthode** : les **relations de récurrence** sont la clé des intégrales à paramètre entier (Wallis, Gamma).

**Réponse.**  $I_n = e - nI_{n-1}$  ;  $I_2 = e - 2 \approx 0,718$ .

### Correction de l'exercice 13 - Intégrer une valeur absolue

On découpe l'intervalle là où l'expression change de signe (relation de Chasles) :

$$\int_{-1}^2 |x| dx = \int_{-1}^0 (-x) dx + \int_0^2 x dx = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

— De même,  $\int_0^3 |x-1| dx = \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^3 (x-1) dx = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$ .

— Interprétation : ce sont des aires de triangles ( $\frac{1}{2}$  et 2), qu'on retrouve sur un dessin.  
Une valeur absolue n'a pas de primitive « d'un seul tenant » simple : on découpe.

**Réponse.**  $\frac{5}{2}$  et  $\frac{5}{2}$ .

### Correction de l'exercice 14 - Reconnaître une dérivée composée

On reconnaît des formes  $u' g'(u)$  :

$$x e^{x^2} = \frac{1}{2} \times 2x e^{x^2} = \frac{1}{2} (e^{x^2})'$$

— Donc  $\int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} [e^{x^2}]_0^1 = \frac{e-1}{2} \approx 0,859$ .

—  $\cos x \sin^3 x = \left( \frac{\sin^4 x}{4} \right)'$ , d'où  $\int_0^{\pi/2} \cos x \sin^3 x dx = \frac{1}{4} [\sin^4 x]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}$ .

— Réflexe : avant toute technique, chercher si l'intégrande est la dérivée d'une composée.

**Réponse.**  $\frac{e-1}{2}$  ;  $\frac{1}{4}$ .

### Correction de l'exercice 15 - Synthèse : calcul d'aire

— **Points d'intersection** :  $x^2 = 2 - x^2$  donne  $x^2 = 1$ , soit  $x = \pm 1$ .

— **Position relative** : sur  $] -1 ; 1[$ , la parabole  $y = 2 - x^2$  est **au-dessus** (en  $x = 0$  :  $2 > 0$ ).

— **Aire** :

$$A = \int_{-1}^1 [(2 - x^2) - x^2] dx = \int_{-1}^1 (2 - 2x^2) dx$$

— **Par parité** (l'intégrande est **paire**) :

$$A = 2 \int_0^1 (2 - 2x^2) dx = 2 \left[ 2x - \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = 2 \left( 2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{8}{3} \approx 2,667$$

— **Contrôle d'ordre de grandeur** : le domaine est inscrit dans le rectangle  $[-1 ; 1] \times [0 ; 2]$ , d'aire 4 ; il en occupe  $\frac{2}{3}$  — plausible pour une « lentille » ✓

— **Méthode générale** : aire =  $\int (f_{\text{haut}} - f_{\text{bas}})$ , les bornes étant les **abscisses d'intersection**.

**Réponse.**  $A = \frac{8}{3} \approx 2,67$ .