

Plaquette 3 - Changements de variable et symétries

Intégrale de Riemann — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Un **changement de variable** $x = \varphi(t)$ transforme $\int f(x) dx$ en $\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$: on remplace x , **on remplace** dx **par** $\varphi'(t) dt$, et on **change les bornes**. On le choisit pour faire disparaître ce qui gêne : une racine ($t = \sqrt{x}$), un $\sqrt{1-x^2}$ ($x = \sin t$), une exponentielle ($t = e^x$). Les **symétries** sont des changements de variable particuliers : $x \mapsto -x$ (parité), $x \mapsto a+b-x$ (qui échange les bornes), $x \mapsto x+T$ (périodicité) ; elles permettent souvent de calculer une intégrale sans primitive.

Exercice 1 - L'aire du quart de disque

Calculer $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ avec le changement de variable $x = \sin t$, et interpréter le résultat.

Exercice 2 - Éliminer une racine

Calculer $\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ avec le changement de variable $t = \sqrt{x}$.

Exercice 3 - Logarithme au dénominateur

Calculer $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln x)}$.

Exercice 4 - Une exponentielle au dénominateur

Calculer $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$.

Exercice 5 - Sinus et cosinus échangés

Soit $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ et $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$. Montrer que $I = J$, puis calculer I .

Exercice 6 - La règle du roi

Calculer $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ en utilisant le changement de variable $x = \pi - t$.

Exercice 7 - Parité

Calculer sans primitive : $\int_{-1}^1 x^3 \cos x dx$ et $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(5x) e^{x^2} dx$. Puis justifier la propriété utilisée.

Exercice 8 - Périodicité

Soit f continue et T -périodique. Montrer que $\int_a^{a+T} f(x) dx$ ne dépend pas de a .
Application : calculer $\int_1^{1+2\pi} \cos^2 x dx$.

Exercice 9 - La substitution $\tan(x/2)$

Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x}$ avec $t = \tan \frac{x}{2}$.

Exercice 10 - Une puissance et une racine

Calculer $\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$ avec $u = 1-x^2$.

Exercice 11 - Reconnaître un arcsinus

Calculer $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Exercice 12 - Échanger x et $1-x$

Montrer que $\int_0^1 x^2(1-x)^5 dx = \int_0^1 x^5(1-x)^2 dx$, puis calculer la seconde en développant.

Exercice 13 - L'erreur de bornes

Un étudiant écrit : « Avec $u = x^2$, $\int_0^2 x e^{x^2} dx = \int_0^2 \frac{1}{2} e^u du = \frac{e^2-1}{2}$. » Corriger.

Exercice 14 - Vrai ou faux ?

- a) $\int_0^\pi \sin x dx = 2 \int_0^{\pi/2} \sin x dx$.
- b) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ se calcule par $\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^1 = -2$.
- c) $\int_0^{2\pi} \sin^{2027} x dx = 0$.
- d) Si f est paire, $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$.

Exercice 15 - Synthèse : une intégrale sans primitive

Soit $I = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x) dx$.

- a) Montrer que $1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right) = \frac{2}{1 + \tan t}$.
- b) En déduire, avec $x = \frac{\pi}{4} - t$, que $I = \frac{\pi \ln 2}{8}$.