

## Plaquette 5 - Fonctions définies par une intégrale

### Intégrale de Riemann — Licence 1 (L1)

#### Exercices

##### Méthode

Si  $f$  est continue sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ , la fonction  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  est la primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$  :  $F' = f$ . Quand les bornes dépendent de  $x$ , on écrit  $\int_{u(x)}^{v(x)} f = G(v(x)) - G(u(x))$  avec  $G$  une primitive, puis on dérive en composée. Ces fonctions s'étudient comme les autres (variations, limites, développements), même quand  $f$  n'a pas de primitive explicite. Une **équation intégrale** se ramène souvent, en dérivant, à une équation différentielle.

##### Exercice 1 - Une fonction sans primitive explicite

Soit  $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ . Étudier la parité et les variations de  $F$ , puis montrer que  $F$  est majorée sur  $[0; +\infty[$ .

##### Exercice 2 - Une fonction constante

Pour  $x > 0$ , soit  $G(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t}$ . Montrer que  $G$  est constante de deux façons.

##### Exercice 3 - Une borne au carré

Soit  $H(x) = \int_0^{x^2} \sin t dt$ . Calculer  $H'(x)$  de deux façons.

##### Exercice 4 - Deux dérivations

Soit  $f$  continue et  $\varphi(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt$ . Calculer  $\varphi'$  et  $\varphi''$ .

##### Exercice 5 - Une limite de taux

Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x e^{t^2} dt$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \sin(t^2) dt$ .

##### Exercice 6 - Une équation intégrale

Trouver toutes les fonctions  $f$  continues sur  $\mathbb{R}$  telles que  $f(x) = 1 + \int_0^x f(t) dt$  pour tout  $x$ .

##### Exercice 7 - Une équation avec une constante cachée

Trouver les fonctions  $f$  continues sur  $[0; 1]$  telles que  $f(x) = x + x \int_0^1 t f(t) dt$  pour tout  $x \in [0; 1]$ .

**Exercice 8 - Le logarithme par l'intégrale**

On définit  $L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$  pour  $x > 0$ . Montrer, sans utiliser les propriétés de  $\ln$ , que  $L(ab) = L(a) + L(b)$ .

**Exercice 9 - Deux bornes trigonométriques**

Soit  $F(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \frac{dt}{1+t^2}$ . Calculer  $F'(x)$  par la formule des bornes variables, puis vérifier avec une primitive.

**Exercice 10 - Développement d'une intégrale**

Donner le développement limité à l'ordre 5 en 0 de  $E(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ .

**Exercice 11 - Convexité d'une primitive**

Soit  $F(x) = \int_0^x \ln(1+t^2) dt$ . Étudier la convexité de  $F$  et sa position par rapport à sa tangente en 0.

**Exercice 12 - Une intégrale à paramètre**

Pour  $a > 0$ , soit  $I(a) = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + a^2}$ . Calculer  $I(a)$  et étudier son comportement quand  $a \rightarrow 0^+$ .

**Exercice 13 - Une intégrale positive qui s'annule**

Soit  $f$  continue et positive sur  $\mathbb{R}$ , et  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ . Montrer que si  $F(1) = 0$ , alors  $f$  est nulle sur  $[0; 1]$ .

**Exercice 14 - Vrai ou faux ?**

Pour  $f$  continue sur  $\mathbb{R}$  et  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  :

- a)  $F$  est dérivable et  $F' = f$ .
- b) Si  $f$  est paire,  $F$  est paire.
- c) Si  $f$  est périodique,  $F$  est périodique.
- d)  $\frac{d}{dx} \int_0^1 f(t) dt = f(x)$ .

**Exercice 15 - Synthèse : une intégrale entre  $x$  et  $2x$** 

Pour  $x > 0$ , soit  $F(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt$ .

- a) Calculer  $F'(x)$  et en déduire les variations de  $F$ .
- b) Montrer que  $e^{-2x} \ln 2 \leq F(x) \leq e^{-x} \ln 2$ .
- c) En déduire les limites de  $F$  en  $0^+$  et en  $+\infty$ .