

Plaque 2 – Primitives et intégration par parties

Intégrale de Riemann — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Pour calculer une intégrale, on cherche d'abord une **primitive** : forme usuelle, dérivée d'une composée, ou décomposition (fractions rationnelles en éléments simples, linéarisation trigonométrique). Si l'intégrande est un **produit** dont un facteur se simplifie en le dérivant (polynôme, $\ln$, $\arctan$), on fait une **intégration par parties** : on dérive ce facteur et on primitive l'autre. On peut répéter l'IPP, ou obtenir une **relation de récurrence** entre intégrales de la même famille.

Exercice 1 – Deux intégrations par parties

Calculer $\int_0^1 x^2 e^x dx$.

Exercice 2 – Exponentielle et cosinus

Calculer $I = \int_0^\pi e^x \cos x dx$ par deux intégrations par parties.

Exercice 3 – Le carré du logarithme

Calculer $\int_1^e (\ln x)^2 dx$.

Exercice 4 – Intégrer l'arctangente

Calculer $\int_0^1 \arctan x dx$ et $\int_0^1 x \arctan x dx$.

Exercice 5 – Les intégrales de Wallis

Soit $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$. Montrer que $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$, puis calculer W_0, W_1, W_2, W_3, W_4 .

Exercice 6 – Une récurrence avec l'exponentielle

Soit $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$. Montrer que $I_n = e - n I_{n-1}$ pour $n \geq 1$, et calculer I_0, I_1, I_2, I_3 .

Exercice 7 – Une IPP simple

Calculer $\int_0^{\pi/2} x \sin x dx$ et $\int_0^\pi x \cos x dx$.

Exercice 8 – Linéariser pour intégrer

Calculer $\int_0^\pi \sin^2 x dx$ et $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx$ par linéarisation.

Exercice 9 - Une puissance impaire

Calculer $\int_0^\pi \sin^3 x \, dx$ sans intégration par parties.

Exercice 10 - Une astuce de réécriture

Calculer $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$.

Exercice 11 - Éléments simples

Calculer $\int_2^3 \frac{dx}{x(x-1)}$ et $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4}$.

Exercice 12 - Tangente et tangente au carré

Calculer $\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx$ et $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x \, dx$.

Exercice 13 - Choisir quoi dériver

Pour $\int_1^2 x \ln x \, dx$, un étudiant dérive x et primitive $\ln x$. Pourquoi est-ce une mauvaise idée ? Faire le calcul efficace.

Exercice 14 - Vrai ou faux ?

- a) $\int_0^1 f(x)g(x) \, dx = \int_0^1 f(x) \, dx \times \int_0^1 g(x) \, dx$.
- b) Une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $] -\infty ; 0[$ est $\ln |x|$.
- c) Deux primitives d'une même fonction sur $\mathbb{R}^*$ diffèrent d'une constante.
- d) $\int_a^b f(x) \, dx = f(b) - f(a)$ si f est de classe C^1 .

Exercice 15 - Synthèse : puissance fois logarithme

Soit $J_n = \int_0^1 x^n \ln x \, dx$ pour $n \in \mathbb{N}$ (l'intégrande se prolonge par continuité en 0).

- a) Calculer J_n par intégration par parties (on admet que le crochet en 0 est nul).
- b) En déduire la limite de J_n et un équivalent.