

Plaque 4 - Sommes de Riemann, encadrements et approximations

Intégrale de Riemann — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Une **somme de Riemann** $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ tend vers $\int_a^b f$ quand f est continue. Pour calculer la limite d'une somme, on la **met sous cette forme** : on factorise par $\frac{1}{n}$ et on fait apparaître $f\left(\frac{k}{n}\right)$. Inversement, pour **encadrer** une somme ou une intégrale, on compare la fonction avec des fonctions plus simples (croissance, inégalités usuelles) et on intègre les inégalités, ce qui est permis car l'intégrale est **croissante**. La **méthode des trapèzes** approche une intégrale par des segments.

Exercice 1 - Une somme qui tend vers $\ln 2$

Déterminer la limite de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$.

Exercice 2 - Une somme qui tend vers $\pi/4$

Déterminer la limite de $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$.

Exercice 3 - La moyenne d'un sinus

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n}$.

Exercice 4 - Racine n -ième de $n!/n^n$

Déterminer la limite de $u_n = \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{1/n}$.

Exercice 5 - Encadrer la série harmonique

En comparant $\frac{1}{k}$ à $\int_k^{k+1} \frac{dx}{x}$ et $\int_{k-1}^k \frac{dx}{x}$, montrer que $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$, où $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Exercice 6 - Somme des racines

Montrer que $\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \sim \frac{2}{3} n^{3/2}$ en écrivant la somme comme une somme de Riemann.

Exercice 7 - Une intégrale qui tend vers 0

Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$. Montrer que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ et en déduire la limite de (I_n) .

Exercice 8 - Encadrer une intégrale sans primitive

Montrer que $\frac{4}{3} \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e - 1$.

Exercice 9 - Positivité stricte

Soit f continue sur $[0; 1]$ telle que $\int_0^1 f(x)^2 dx = 0$. Montrer que $f = 0$. Le résultat reste-t-il vrai sans continuité ?

Exercice 10 - La méthode des trapèzes

Approcher $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ par la méthode des trapèzes avec 4 intervalles. Comparer à la valeur exacte.

Exercice 11 - Le théorème de la moyenne

Soit f continue sur $[a; b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a; b]$ tel que $\int_a^b f = (b-a)f(c)$.
Application : trouver un tel c pour $f(x) = x^2$ sur $[0; 3]$.

Exercice 12 - Majorer une intégrale

Montrer que $\left| \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{1+x} dx \right| \leq \ln(1+2\pi)$, puis que cette intégrale est positive.

Exercice 13 - Somme des carrés

Déterminer la limite de $\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$ de deux façons : par une somme de Riemann, puis avec la formule $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 14 - Vrai ou faux ?

- a) Si $\int_a^b f \geq 0$, alors $f \geq 0$ sur $[a; b]$.
- b) Si $f \leq g$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ (avec $a \leq b$).
- c) $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ ont la même limite si f est continue sur $[0; 1]$.
- d) Une fonction continue d'intégrale nulle sur $[a; b]$ s'annule sur $[a; b]$.

Exercice 15 - Synthèse : un produit infini

Déterminer la limite de $P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{1/n}$.