

Fiche de révision – Intégrale de Riemann

Licence 1 – Définitions, théorèmes, techniques de calcul et pièges

Construction et sommes de Riemann

Subdivision : $a = x_0 < \dots < x_n = b$.

Fonction en escalier : constante sur chaque $]x_k, x_{k+1}[$.
Si sa valeur est c_k ,

$$\int_a^b \varphi = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x_{k+1} - x_k).$$

Pour f bornée, sur $[x_k, x_{k+1}]$:

$$m_k = \inf f, \quad M_k = \sup f.$$

Sommes de Darboux :

$$S_- = \sum m_k \Delta x_k, \quad S_+ = \sum M_k \Delta x_k.$$

Riemann-intégrable :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma, \quad S_+ - S_- < \varepsilon.$$

Toute fonction continue ou continue par morceaux sur un segment est intégrable.

Somme de Riemann régulière

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \longrightarrow \int_a^b f(x) \, dx.$$

Cas-type :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Phi(k/n) \rightarrow \int_0^1 \Phi(x) \, dx.$$

Propriétés de l'intégrale

Linéarité :

$$\int (\lambda f + \mu g) = \lambda \int f + \mu \int g.$$

Chasles :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f, \quad \int_b^a f = - \int_a^b f.$$

Si $f \leq g$, alors

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Si $m \leq f \leq M$:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

Majorations :

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

et, si $|f| \leq M$,

$$\left| \int_a^b f \right| \leq M(b-a).$$

Valeur moyenne. Si f est continue sur $[a, b]$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(c)(b-a).$$

Cauchy–Schwarz

$$\left| \int_a^b fg \right|^2 \leq \left(\int_a^b f^2 \right) \left(\int_a^b g^2 \right).$$

Théorème fondamental

Si f est continue et

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt,$$

alors

$$F'(x) = f(x), \quad F(a) = 0.$$

Si G est une primitive de f :

$$\int_a^b f(x) \, dx = G(b) - G(a).$$

Primitives essentielles

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C, \quad \int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C, \quad \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

Formes composées :

$$\int u' e^u = e^u + C, \quad \int \frac{u'}{u} = \ln |u| + C.$$

Intégration par parties

Si $u, v \in C^1([a, b])$:

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx.$$

Bon choix : dériver ce qui se simplifie (polynôme, ln, fonction inverse) et primitiver ce qui est facile (e^x , sin, cos).

Exemple :

$$\int_0^1 xe^x \, dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = 1.$$

Changement de variable

Si $x = \varphi(t)$ avec $\varphi \in C^1$ bijective et monotone :

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt$$

avec $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Procédure : poser la nouvelle variable, calculer le différentiel, transformer *tout* l'intégrande, puis changer les bornes.

Exemple : $u = x^2$ dans

$$\int_0^1 2xe^{x^2} \, dx = \int_0^1 e^u \, du = e - 1.$$

Fractions rationnelles

Pour P/Q :

- division euclidienne si $\deg P \geq \deg Q$;
- factorisation de Q ;
- décomposition en éléments simples ;
- intégration terme à terme.

Exemple :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

Donc

$$\int \frac{dx}{x(x+1)} = \ln|x| - \ln|x+1| + C.$$

Trigonométrie

Identités :

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)].$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)].$$

Si une puissance de sin ou cos est impaire, isoler souvent un facteur pour une substitution.

Symétries

Sur $[-a, a]$:

$$f \text{ paire} \Rightarrow \int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f,$$

$$f \text{ impaire} \Rightarrow \int_{-a}^a f = 0.$$

Pièges à éviter

- Après une substitution, **changer les bornes** ou revenir à la variable initiale avant l'évaluation.
- En IPP, ne pas oublier le terme $[uv]_a^b$.
- $\int_a^b f$ est une aire **algébrique**, pas toujours positive.
- Une primitive F donne $\int_a^b f = F(b) - F(a)$, pas $F(a) - F(b)$.
- Vérifier les hypothèses du changement de variable (C^1 , bijectivité/monotonie dans la version utilisée).

Réflexes d'examen

- Somme avec $1/n$ et $k/n \Rightarrow$ penser **somme de Riemann**.
- Produit avec polynôme, ln, arctan $\Rightarrow$ tester une **IPP**.
- Une dérivée interne apparaît $\Rightarrow$ tester une **substitution**.
- Fraction rationnelle $\Rightarrow$ **éléments simples**.
- Intervalle symétrique $[-a, a] \Rightarrow$ regarder la **parité**.