

Intégrale de Riemann en L1 maths

Fonctions en escalier, sommes de Riemann, primitives, IPP et changement de variable

Idée directrice. En L1, l'intégrale n'est plus seulement une aire calculée par une primitive. On construit d'abord une notion d'intégrale sur un segment, on établit ses propriétés, puis on relie cette intégrale aux primitives grâce au théorème fondamental de l'analyse.

1. Fonctions en escalier et première notion d'intégrale

Subdivision d'un segment

Une **subdivision** de $[a, b]$ est une famille finie

$$\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n), \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Le **pas** de la subdivision est

$$|\sigma| = \max_{0 \leq k \leq n-1} (x_{k+1} - x_k).$$

Fonction en escalier

Une fonction $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **en escalier** s'il existe une subdivision σ telle que φ soit constante sur chacun des intervalles ouverts $]x_k, x_{k+1}[$. Si sa valeur sur cet intervalle vaut c_k , on pose

$$\int_a^b \varphi(x) \, dx = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x_{k+1} - x_k).$$

Les valeurs prises aux points de subdivision n'ont aucune influence sur l'intégrale.

Exemple

Sur $[0, 3]$, soit $\varphi = 2$ sur $[0, 1[$ et $\varphi = -1$ sur $[1, 3]$. Alors

$$\int_0^3 \varphi(x) \, dx = 2 \times 1 + (-1) \times 2 = 0.$$

L'intégrale est une **aire algébrique** : les zones sous l'axe des abscisses comptent négativement.

Encadrements inférieur et supérieur

Pour une fonction bornée $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et une subdivision σ , on définit, sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$,

$$m_k = \inf_{[x_k, x_{k+1}]} f, \quad M_k = \sup_{[x_k, x_{k+1}]} f.$$

Les sommes de Darboux associées sont

$$S_-(f, \sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k), \quad S_+(f, \sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k (x_{k+1} - x_k).$$

Toujours,

$$S_-(f, \sigma) \leq S_+(f, \sigma).$$

Intégrabilité au sens de Riemann

Une fonction bornée $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est **Riemann-intégrable** si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision σ telle que

$$S_+(f, \sigma) - S_-(f, \sigma) < \varepsilon.$$

Dans ce cas, les intégrales inférieure et supérieure coïncident ; leur valeur commune est notée

$$\int_a^b f(x) \, dx.$$

Cette définition formalise l'idée d'**encadrement qui se referme** entre deux fonctions en escalier.

Fonctions usuelles intégrables

Toute fonction continue sur un segment est Riemann-intégrable. Plus généralement, toute fonction **continue par morceaux** sur un segment est Riemann-intégrable.

Piège classique

La continuité n'est pas nécessaire pour être intégrable : les fonctions en escalier, qui peuvent avoir des sauts, sont intégrables. En revanche, toutes les fonctions bornées ne sont pas Riemann-intégrables.

2. Sommes de Riemann

Définition

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Pour la subdivision régulière

$$x_k = a + k \frac{b-a}{n}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

et en choisissant, par exemple, les extrémités gauches, la somme de Riemann est

$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

Convergence des sommes de Riemann

Si f est continue sur $[a, b]$, alors

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \longrightarrow \int_a^b f(x) \, dx.$$

Plus généralement, on peut choisir un point $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ dans chaque sous-intervalle : dès que le pas tend vers 0, la somme

$$\sum_k f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$

tend vers l'intégrale.

Calcul de $\int_0^1 x \, dx$ par une somme de Riemann

On a

$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} = \frac{1}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n-1}{2n} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}.$$

Reconnaître une somme de Riemann

Lorsqu'une limite contient une somme du type

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Phi\left(\frac{k}{n}\right),$$

penser à l'intégrale $\int_0^1 \Phi(x) \, dx$. Si l'intervalle est $[a, b]$, faire apparaître le facteur $(b-a)/n$ et l'argument $a + k(b-a)/n$.

3. Propriétés fondamentales de l'intégrale

Dans toute cette section, f et g sont intégrables sur $[a, b]$.

Linéarité

Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Positivité et comparaison

Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f \geq 0.$$

Si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Relation de Chasles

Pour tout $c \in [a, b]$,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Par convention,

$$\int_b^a f = - \int_a^b f, \quad \int_a^a f = 0.$$

Majorations utiles

Si $m \leq f(x) \leq M$ sur $[a, b]$, alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a).$$

De plus,

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

En particulier, si $|f(x)| \leq M$,

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq M(b-a).$$

Inégalité de la moyenne

Si f est continue et g intégrable de signe constant sur $[a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = f(c) \int_a^b g(x) \, dx.$$

Dans le cas $g \equiv 1$, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(c)(b-a).$$

Le nombre

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$

est la **valeur moyenne** de f sur $[a, b]$.

Inégalité de Cauchy–Schwarz

Pour des fonctions continues f, g sur $[a, b]$,

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) \, dx \right|^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2 \, dx \right) \left(\int_a^b g(x)^2 \, dx \right).$$

Elle se démontre en utilisant la positivité de

$$\int_a^b (f + \lambda g)^2$$

considérée comme un trinôme en λ .

4. Le théorème fondamental de l'analyse

Primitive définie par une intégrale

Soit f continue sur un intervalle I , et soit $a \in I$. La fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

est dérivable sur I et vérifie

$$\boxed{F'(x) = f(x).}$$

De plus, $F(a) = 0$.

Idée de démonstration

Pour $h \neq 0$,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) \, dt.$$

Par continuité de f , la moyenne de f sur le petit intervalle $[x, x+h]$ tend vers $f(x)$ lorsque $h \rightarrow 0$.

Formule de Newton–Leibniz

Si f est continue sur $[a, b]$ et si F est une primitive de f , alors

$$\boxed{\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).}$$

Exemple

Comme $x \mapsto x^3/3$ est une primitive de x^2 ,

$$\int_1^2 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Piège classique

Le théorème fondamental suppose ici la continuité de f . Une primitive n'est pas un objet que l'on peut toujours invoquer pour une fonction arbitraire sans vérifier les hypothèses du cadre de cours.

5. Intégration par parties

La formule d'intégration par parties provient de la dérivée d'un produit :

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Intégration par parties

Si u, v sont de classe C^1 sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx.$$

Choisir u et v'

On cherche à **simplifier** l'intégrale restante. En pratique :

- prendre souvent comme u un logarithme, une fonction inverse trigonométrique ou un polynôme ;
- prendre comme v' une exponentielle, un sinus ou un cosinus, faciles à primitiver.

Toujours écrire d'abord u, u', v', v avant d'appliquer la formule.

Exemple

Calculons $\int_0^1 xe^x \, dx$. On prend $u = x$ et $v' = e^x$, donc $u' = 1$ et $v = e^x$:

$$\int_0^1 xe^x \, dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = e - (e - 1) = 1.$$

6. Changement de variable

Changement de variable dans une intégrale

Soit $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ une fonction de classe C^1 , bijective et strictement monotone, avec $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$. Si f est continue sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt.$$

Dans les calculs, on écrit souvent $x = \varphi(t)$ et

$$dx = \varphi'(t) \, dt.$$

Procédure sûre

Pour une intégrale définie :

1. choisir le changement de variable $x = \varphi(t)$;
2. calculer $dx = \varphi'(t) \, dt$;
3. transformer l'intégrande entièrement ;
4. **transformer aussi les bornes** ;
5. intégrer dans la nouvelle variable.

Substitution simple

Calculons

$$\int_0^1 2xe^{x^2} dx.$$

Posons $u = x^2$, donc $du = 2x dx$. Les bornes deviennent $u = 0$ puis $u = 1$:

$$\int_0^1 2xe^{x^2} dx = \int_0^1 e^u du = e - 1.$$

Piège classique

Ne jamais mélanger ancienne variable et nouvelle variable dans la même intégrale. Pour une intégrale définie, soit on change les bornes immédiatement, soit on revient à la variable initiale avant d'évaluer une primitive. Les hypothèses de régularité et de bijectivité/monotonie doivent être vérifiées dans la version du théorème utilisée.

7. Primitives usuelles à connaître

Sur tout intervalle où les expressions sont définies :

$$\begin{aligned} \int x^\alpha dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1), \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln |x| + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \\ \int \cos x dx &= \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan x + C, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C. \end{aligned}$$

Des formes composées apparaissent constamment :

$$\int u'(x)e^{u(x)} dx = e^{u(x)} + C,$$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln |u(x)| + C,$$

$$\int u'(x) \cos(u(x)) dx = \sin(u(x)) + C.$$

8. Fractions rationnelles : stratégie de primitive

Une fraction rationnelle s'écrit

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad P, Q \in \mathbb{R}[X].$$

Décomposition en éléments simples

Pour primitiver P/Q :

1. si $\deg P \geq \deg Q$, effectuer d'abord la division euclidienne ;
2. factoriser Q sur $\mathbb{R}$;
3. décomposer en éléments simples ;
4. intégrer chaque terme avec les primitives usuelles.

Pour deux facteurs linéaires distincts,

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}.$$

Pour un facteur quadratique irréductible, on rencontre des termes du type

$$\frac{\alpha x + \beta}{x^2 + px + q},$$

qui conduisent après complétion du carré à une combinaison de logarithme et d'arctangente.

Exemple

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1},$$

donc, sur un intervalle ne contenant ni 0 ni -1 ,

$$\int \frac{1}{x(x+1)} dx = \ln|x| - \ln|x+1| + C.$$

9. Intégrales trigonométriques : méthodes usuelles

Produits de sinus et cosinus

Les identités de linéarisation sont très utiles :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b)),$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)),$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)).$$

Puissances de sinus et cosinus

On utilise

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Si l'une des puissances est impaire, on isole souvent un facteur $\sin x dx$ ou $\cos x dx$ pour effectuer une substitution.

Exemple

$$\int \sin^3 x \cos x \, dx.$$

Posons $u = \sin x$, $du = \cos x \, dx$:

$$\int \sin^3 x \cos x \, dx = \int u^3 \, du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

10. Symétries et simplifications sur un segment

Si f est continue sur $[-a, a]$:

— si f est paire,

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx;$$

— si f est impaire,

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0.$$

Une autre identité fréquente sur $[0, a]$ est obtenue avec $x = a - t$:

$$\int_0^a f(x) \, dx = \int_0^a f(a - x) \, dx.$$

Ainsi,

$$2 \int_0^a f(x) \, dx = \int_0^a (f(x) + f(a - x)) \, dx.$$

11. Exercices corrigés**Exercice 1 – Limite d'une somme**

Calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + (k/n)^2}.$$

Correction

C'est une somme de Riemann sur $[0, 1]$ pour $f(x) = 1/(1 + x^2)$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + (k/n)^2} \longrightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 2 – IPP

Calculer

$$I = \int_1^e \ln x \, dx.$$

Correction

Prendre $u = \ln x$, $v' = 1$, donc $u' = 1/x$ et $v = x$:

$$I = [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 \, dx = e - (e - 1) = 1.$$

Exercice 3 – Changement de variable

Calculer

$$J = \int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \, dx.$$

Correction

Posons $u = \sin x$, donc $du = \cos x \, dx$. Les bornes deviennent 0 et 1 :

$$J = \int_0^1 u \, du = \frac{1}{2}.$$

Exercice 4 – Cauchy–Schwarz

Montrer que, pour toute fonction continue f sur $[0, 1]$,

$$\left(\int_0^1 f(x) \, dx \right)^2 \leq \int_0^1 f(x)^2 \, dx.$$

Correction

Appliquer Cauchy–Schwarz avec $g \equiv 1$:

$$\left| \int_0^1 f \cdot 1 \right|^2 \leq \left(\int_0^1 f^2 \right) \left(\int_0^1 1^2 \right) = \int_0^1 f^2.$$

12. Checklist de résolution**Avant de calculer une intégrale**

1. **Identifier la structure** : primitive immédiate, composition, produit, quotient rationnel, trigonométrie ?
2. **Chercher une substitution** si une dérivée interne apparaît presque entièrement.
3. **Essayer une IPP** lorsqu'un facteur se simplifie en dérivant.
4. Pour une fraction rationnelle, **décomposer en éléments simples**.
5. Pour une intégrale définie, exploiter les **symétries** et transformer correctement les bornes.
6. À la fin, vérifier l'ordre des bornes, les signes et éventuellement dériver la primitive obtenue.

Piège classique

Trois erreurs reviennent constamment :

- oublier de changer les bornes après une substitution ;
- oublier le terme de bord $[uv]_a^b$ dans une intégration par parties ;
- traiter $\int_a^b f$ comme une aire toujours positive : l'intégrale est signée.

À retenir. La théorie et le calcul sont deux faces du même chapitre : la construction de Riemann donne un sens rigoureux à $\int_a^b f$, les sommes de Riemann l'approchent, puis le théorème fondamental permet de revenir au calcul par primitives. Les techniques d'IPP et de changement de variable ne sont efficaces que si leurs hypothèses et leurs bornes sont maîtrisées.