

Plaquette 3 - Continuité : exemples, contre-exemples et opérations

Limites et continuité — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Continuité en a .

$$f \text{ continue en } a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow (\forall (x_n), x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a))$$

- Somme, produit, quotient (dénominateur non nul), composée de fonctions continues : continues.
- Prolongement : si f est définie au voisinage de a sauf en a et $\lim_a f = \ell$ finie, on pose $f(a) = \ell$.
- Raccord : une fonction définie par morceaux est continue au point de raccord si et seulement si les limites à gauche, à droite et la valeur coïncident.
- Si $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ (fonction lipschitzienne), f est continue.
- $|f|$, $\max(f, g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$ et $\min(f, g)$ sont continues si f et g le sont.

Correction de l'exercice 1 - Trois prolongements

On calcule les limites en 0 :

$$\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 \quad \frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1 \quad x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

- Les trois limites sont finies : les trois fonctions sont prolongeables par continuité, en posant respectivement $f(0) = 1$, $g(0) = 1$ et $h(0) = 0$.
- Les deux premières sont des taux d'accroissement (de sin et de exp en 0) ; la troisième relève des croissances comparées.
- Contre-exemple : $\frac{1}{x}$ n'est pas prolongeable (limites infinies, et différentes à gauche et à droite).

Réponse. Oui pour les trois : valeurs 1, 1, 0.

Correction de l'exercice 2 - Choisir la valeur au point

On calcule la limite en 1 (forme $\frac{0}{0}$) par la quantité conjuguée :

$$\frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \frac{(x+3) - 4}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{1}{4}$$

- f est continue en 1 si et seulement si $a = \frac{1}{4}$.
- Autre lecture : c'est le taux d'accroissement de $x \mapsto \sqrt{x+3}$ en 1, et sa dérivée vaut $\frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$.

Réponse. $a = \frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 3 - Discontinuités de $x \mapsto E(x)$

Sur chaque intervalle $]n; n+1[$, E est constante égale à n , donc $f(x) = nx$ est continue.

- En un entier $n \in \{1, 2\}$: $f(n) = n^2$ et la limite à droite vaut $n \times n = n^2$; la limite à gauche vaut $n \times (n-1)$.

$$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = n(n-1) \neq n^2$$

- f est discontinue en 1 et 2 (et continue à droite). En 0, elle est continue ($f(x) = 0$ sur $[0; 1[$). En 3, bord de l'intervalle, seule compte la continuité à gauche, qui échoue aussi ($6 \neq 9$).
- Multiplier E par x ne « répare » pas les sauts, sauf en 0, où le facteur x s'annule.

Réponse. Continue sauf en 1, 2 et 3.

Correction de l'exercice 4 - La fonction de Dirichlet

Soit $a \in \mathbb{R}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, il existe une suite de rationnels $r_n \rightarrow a$ et une suite d'irrationnels $i_n \rightarrow a$.

$$D(r_n) = 1 \rightarrow 1 \quad D(i_n) = 0 \rightarrow 0$$

- Les deux limites sont différentes : D n'a pas de limite en a , donc n'y est pas continue.
- C'est vrai en **tout** point : on ne peut même pas tracer la courbe de D .

Réponse. Suites rationnelle et irrationnelle vers a : limites 1 et 0.

Correction de l'exercice 5 - Continue en un seul point

- En 0 : pour tout x , $|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq |x|$, qui tend vers 0. f est continue en 0.
- En $a \neq 0$: avec des rationnels $r_n \rightarrow a$ et des irrationnels $i_n \rightarrow a$,

$$f(r_n) = r_n \rightarrow a \quad f(i_n) = 0 \rightarrow 0$$

- Comme $a \neq 0$, les limites diffèrent : f est discontinue en a .
- On peut ainsi fabriquer des fonctions continues en un seul point.

Réponse. Continue en 0 ($|f(x)| \leq |x|$), discontinue ailleurs.

Correction de l'exercice 6 - Une composée continue

On décompose en fonctions usuelles.

- $x \mapsto 1 + e^x$ est continue et à valeurs dans $]1; +\infty[\subset]0; +\infty[$, où $\ln$ est continue : f est continue sur $\mathbb{R}$ (composée).
- $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 \geq 1 > 0$:

$$g = \sqrt{\cdot} \circ ((x - 1)^2 + 1)$$

- est la composée d'un polynôme à valeurs dans $[1; +\infty[$ et de la racine, continue sur $]0; +\infty[$: g est continue.
- Il faut toujours vérifier que les valeurs de la fonction « intérieure » sont dans le domaine de continuité de la fonction « extérieure ».

Réponse. Composées de fonctions continues (valeurs dans les bons domaines).

Correction de l'exercice 7 - Valeur absolue et maximum

- $|f|$ est la composée de f et de la valeur absolue, continue (et même : $||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)|$).
- Pour le maximum :

$$\max(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2}$$

- est une combinaison de fonctions continues.

— Contre-exemple : $f(x) = 1$ si $x \geq 0$, -1 sinon, est discontinue en 0 , mais $|f| = 1$ est continue.

Réponse. Composée ; formule du max ; $f = \pm 1$ selon le signe.

Correction de l'exercice 8 - Somme et produit de discontinues

a) Par l'absurde : si $f + g$ était continue en a , alors

$$g = (f + g) - f$$

— serait continue en a (différence de fonctions continues) : contradiction.

— b) Oui : $h(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$, -1 sinon, est discontinue partout (même argument que Dirichlet), mais $h \times h = 1$ est continue.

— Pour la somme de deux discontinues, tout est possible : $h + (-h) = 0$ est continue.

Réponse. a) $g = (f + g) - f$ · b) oui, $h^2 = 1$.

Correction de l'exercice 9 - Une propriété d'invariance

Soit $x \in \mathbb{R}$. En appliquant la relation à $\frac{x}{2}, \frac{x}{4} \dots$ on obtient par récurrence

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

— Or $\frac{x}{2^n} \rightarrow 0$, et f est continue en 0 : $f\left(\frac{x}{2^n}\right) \rightarrow f(0)$.

— La suite constante $f(x)$ tend donc vers $f(0)$: $f(x) = f(0)$. f est constante.

— Sans continuité en 0 , c'est faux : $f(x) = 1$ si $x = 0$ et 0 sinon vérifie $f(2x) = f(x)$.

Réponse. $f(x) = f(x/2^n) \rightarrow f(0)$.

Correction de l'exercice 10 - Lipschitzienne donc continue

a) Soit a et $\varepsilon > 0$. Avec $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ (si $k > 0$), $|x - a| \leq \delta$ entraîne $|f(x) - f(a)| \leq k\delta = \varepsilon$. (Si $k = 0$, f est constante.)

b) Par la formule $\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$ et $|\sin t| \leq |t|$:

$$|\sin x - \sin y| \leq 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \leq |x - y|$$

— Le même δ convient en tout point a : c'est plus fort que la continuité (on parle de continuité uniforme).

Réponse. a) $\delta = \varepsilon / k$ · b) formule de $\sin p - \sin q$.

Correction de l'exercice 11 - La racine carrée en 0

— En 0 : soit $\varepsilon > 0$. Pour $0 \leq x \leq \varepsilon^2$, on a $\sqrt{x} \leq \varepsilon$. Donc $\delta = \varepsilon^2$ convient.

— En $a > 0$: par la quantité conjuguée,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}}$$

— donc $\delta = \varepsilon\sqrt{a}$ convient.

— En 0 , le δ est bien plus petit que ε (ε^2) : la racine « monte » très vite près de 0 (tangente verticale).

Réponse. $\delta = \varepsilon^2$ en 0 ; $\delta = \varepsilon\sqrt{a}$ en $a > 0$.

Correction de l'exercice 12 - Raccorder avec deux paramètres

Chaque morceau est continu sur son intervalle ouvert ; il reste les raccords en 0 et en 1.

— En 0 : $\lim_{0^-} f = b$ et $f(0) = e^0 = 1$; la limite à droite vaut aussi 1. Condition : $b = 1$.

— En 1 : $f(1) = e$, limite à gauche e , limite à droite c . Condition :

$$c = e$$

— a est libre : f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $b = 1$ et $c = e$.

— (Pour la dérivabilité en 0, on imposerait en plus $a = 1$.)

Réponse. $b = 1$, $c = e$, a quelconque.

Correction de l'exercice 13 - Deux fonctions égales sur les rationnels

On pose $h = f - g$, continue et nulle sur $\mathbb{Q}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $r_n \in \mathbb{Q}$ avec $r_n \rightarrow x$ (densité). Par continuité :

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h(r_n) = 0$$

— Donc $f = g$.

— Sur $\mathbb{Z}$ seulement, c'est faux : $f(x) = \sin(\pi x)$ et $g = 0$ coïncident sur $\mathbb{Z}$ sans être égales. $\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.

Réponse. $h = f - g$ nulle sur $\mathbb{Q}$ dense, donc partout ; faux sur $\mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux ?

a) **Vrai** : la limite est $f(a)$.

b) **Faux** : $h = 1$ sur $\mathbb{Q}$, -1 ailleurs, a un carré constant.

c) **Faux** : soit $k(x) = 1$ si $|x| = 1$ et $k(x) = 0$ sinon, discontinue en ± 1 . La fonction h ci-dessus, discontinue partout, ne prend que les valeurs ± 1 : $k \circ h = 1$ est continue.

d) **Faux** : $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0; 1]$ et non bornée. Le théorème des bornes atteintes exige un **segment** :

$$f \text{ continue sur } [a; b] \Rightarrow f \text{ bornée}$$

Réponse. a) vrai · b) faux · c) faux · d) faux.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : une fonction qui recolle ses sauts

a) Sur $]n; n+1[$, $E(x) = n$ et $h(x) = n + \sqrt{x-n}$, continue (composée).

b) En n : $h(n) = n + 0 = n$. À droite, $h(x) = n + \sqrt{x-n} \rightarrow n$. À gauche, sur $]n-1; n[$, $h(x) = n-1 + \sqrt{x-n+1}$, et

$$\lim_{x \rightarrow n^-} h(x) = n-1 + \sqrt{1} = n$$

— Les trois valeurs coïncident : h est continue en n , donc sur $\mathbb{R}$, bien que E soit discontinue.

— c) Sur $[0; 1]$, arc de racine de $(0, 0)$ à $(1, 1)$; puis le même arc translaté de $(1, 1)$ à $(2, 2)$: une « échelle » continue et croissante.

Réponse. Continue partout : les sauts de E sont compensés par la racine.