

Plaquette 5 - Fonctions réciproques et problèmes de continuité

Limites et continuité — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Réciproques usuelles.

— $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, réciproque de $\tan$ restreinte à $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

— $\arcsin : [-1; 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; $\arccos : [-1; 1] \rightarrow [0; \pi]$.

$$\arcsin(\sin x) = x \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad \arccos(\cos x) = x \Leftrightarrow x \in [0; \pi]$$

— $\operatorname{argsh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$, réciproque de sh sur $\mathbb{R}$.

— Une fonction monotone a en tout point une limite à gauche et une limite à droite.

Correction de l'exercice 1 - Valeurs de l'arctangente

$\arctan y$ est l'unique $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan \theta = y$.

$$\tan \frac{\pi}{4} = 1 \quad \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \quad \tan \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

— Donc $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, $\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, $\arctan \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

— $\tan$ tend vers $+\infty$ en $\frac{\pi}{2}^-$: $\arctan y \rightarrow \frac{\pi}{2}$ quand $y \rightarrow +\infty$, et $\rightarrow -\frac{\pi}{2}$ en $-\infty$.

— La courbe de $\arctan$ a deux asymptotes horizontales, $y = \pm \frac{\pi}{2}$.

Réponse. $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{6}$; limites $\pm \frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 2 - Le piège de $\arcsin(\sin x)$

$\arcsin(\sin x) = x$ seulement si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Sinon, on cherche l'angle de cet intervalle qui a le même sinus.

— $\frac{\pi}{6}$ est dans l'intervalle : $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$.

— $\sin \frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3}$, et $\frac{\pi}{3}$ est dans l'intervalle :

$$\arcsin\left(\sin \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \neq \frac{2\pi}{3}$$

— $\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$: $\arcsin\left(\sin \frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

Réponse. $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{6}$.

Correction de l'exercice 3 - $\arccos(\cos x)$ sur une période

— Si $x \in [0; \pi]$: $\arccos(\cos x) = x$.

— Si $x \in [\pi; 2\pi]$: $\cos x = \cos(2\pi - x)$ et $2\pi - x \in [0; \pi]$, donc

$$\arccos(\cos x) = 2\pi - x$$

— Allure : une « dent de scie » en triangle, qui monte de 0 à π sur $[0; \pi]$ puis redescend à 0 en 2π ; la fonction est paire et 2π -périodique.

— Vérification : $x = \frac{3\pi}{2}$ donne $\cos x = 0$ et $\arccos 0 = \frac{\pi}{2} = 2\pi - \frac{3\pi}{2}$.

Réponse. x sur $[0; \pi]$; $2\pi - x$ sur $[\pi; 2\pi]$.

Correction de l'exercice 4 - Une identité de l'arctangente

Soit $x > 0$ et $\theta = \arctan x \in]0; \frac{\pi}{2}[$. Alors $\frac{\pi}{2} - \theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$ et

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{x}$$

— Comme $\frac{\pi}{2} - \theta$ est dans l'intervalle de référence, $\arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \theta$: la somme vaut $\frac{\pi}{2}$.

— Pour $x < 0$, on utilise l'impairité de $\arctan$:

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\left(\arctan(-x) + \arctan \frac{1}{-x}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

— Contrôle : $x = 1$ donne $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Réponse. $\frac{\pi}{2}$ si $x > 0$; $-\frac{\pi}{2}$ si $x < 0$.

Correction de l'exercice 5 - La réciproque du sinus hyperbolique

sh est continue, de dérivée $\cosh x > 0$, donc strictement croissante ; ses limites sont $-\infty$ et $+\infty$: c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

— Soit $y \in \mathbb{R}$. Avec $t = e^x > 0$, l'équation $\sinh x = y$ devient $t - \frac{1}{t} = 2y$, soit $t^2 - 2yt - 1 = 0$.

— Les racines ont pour produit -1 : une seule est positive, $t = y + \sqrt{y^2 + 1}$. Donc

$$\operatorname{argsh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$$

— Contrôle : $\sinh(0) = 0$ et $\operatorname{argsh}(0) = \ln 1 = 0$.

Réponse. $\operatorname{argsh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$.

Correction de l'exercice 6 - La fonction $x|x|$

— $f(x) = x^2$ si $x \geq 0$ et $-x^2$ si $x < 0$: continue, strictement croissante sur chaque morceau, avec raccord en 0 ; donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de limites $\pm\infty$: bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

— Réciproque : si $y \geq 0$, l'antécédent est positif et $x^2 = y$, donc $x = \sqrt{y}$; si $y < 0$, $x = -\sqrt{-y}$.

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y} & \text{si } y \geq 0 \\ -\sqrt{-y} & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

— Écriture compacte : $f^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{|y|}}$ pour $y \neq 0$, et 0 en 0. La réciproque est continue, comme prévu par le théorème.

Réponse. $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ si $y \geq 0$, $-\sqrt{-y}$ sinon.

Correction de l'exercice 7 - Une fonction périodique

Sur le segment $[0; T]$, f est continue : elle y atteint un minimum $m = f(a)$ et un maximum $M = f(b)$.

— Pour $x \in \mathbb{R}$, on écrit $x = kT + t$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $t \in [0; T[$ (division de x par T). Par périodicité :

$$f(x) = f(t) \in [m; M]$$

- Donc $m \leq f \leq M$ sur $\mathbb{R}$, et ces valeurs sont atteintes en a et b .
- Exemple : $\sin + \cos$ atteint son maximum $\sqrt{2}$; le théorème garantit l'existence avant tout calcul.

Réponse. Bornes atteintes sur $[0; T]$, puis périodicité.

Correction de l'exercice 8 - Limites finies aux infinis

Notons ℓ et ℓ' les limites. Il existe $A > 0$ tel que $|f(x) - \ell| \leq 1$ pour $x \geq A$ et $|f(x) - \ell'| \leq 1$ pour $x \leq -A$.

- Sur $[-A; A]$, f est bornée (bornes atteintes) par un M_0 . Donc pour tout x :

$$|f(x)| \leq \max(M_0, |\ell| + 1, |\ell'| + 1)$$
- Les bornes ne sont pas forcément atteintes : $\arctan$ est bornée par $\frac{\pi}{2}$ sans l'atteindre.
- Même découpage que pour le minimum sur $\mathbb{R}$: un segment central et deux « queues » contrôlées par les limites.

Réponse. Bornée ; bornes pas forcément atteintes ($\arctan$).

Correction de l'exercice 9 - Un carré constant

Pour tout x , $f(x) \in \{-1; 1\}$: f ne s'annule pas.

- Si f prenait les deux valeurs, disons $f(a) = -1$ et $f(b) = 1$, le TVI donnerait c entre a et b avec

$$f(c) = 0$$

- ce qui est impossible. Donc f est constante, égale à 1 ou à -1 .
- Sans continuité, c'est faux : $f = 1$ sur $\mathbb{Q}$, -1 ailleurs, vérifie $f^2 = 1$.
- Plus généralement, une fonction continue sur un intervalle à valeurs dans un ensemble « troué » est constante.

Réponse. TVI : f ne peut pas passer de -1 à 1 sans s'annuler.

Correction de l'exercice 10 - Point fixe d'une fonction décroissante

On pose $g(x) = f(x) - x$, continue et **strictement** décroissante (somme d'une fonction décroissante et de $-x$) : au plus un zéro.

- Pour $x \geq 0$: $f(x) \leq f(0)$, donc $g(x) \leq f(0) - x \rightarrow -\infty$.
- Pour $x \leq 0$: $f(x) \geq f(0)$, donc $g(x) \geq f(0) - x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{-\infty} g = +\infty \quad \lim_{+\infty} g = -\infty$$

- Par le TVI, g s'annule : il existe un unique c avec $f(c) = c$.
- Exemple : $f(x) = -x^3$ a pour unique point fixe 0.

Réponse. $g = f - \text{id}$ strictement décroissante de $+\infty$ à $-\infty$.

Correction de l'exercice 11 - Injective sans être monotone

- Continue sur $\mathbb{R}^*$; injective : $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Rightarrow x = y$.
- Non monotone sur $\mathbb{R}^*$: $-1 < 1$ et $f(-1) = -1 < f(1) = 1$, mais $1 < 2$ et $f(1) = 1 > f(2) = \frac{1}{2}$.

$$f(-1) < f(1) \quad \text{et} \quad f(1) > f(2)$$

- Pas de contradiction : $\mathbb{R}^*$ n'est **pas un intervalle**. Sur chacun des intervalles $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, la fonction est bien strictement décroissante.

Réponse. $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.

Correction de l'exercice 12 - Limites d'une fonction monotone

L'ensemble $A = \{f(x) \mid x < a\}$ est non vide et majoré par $f(a)$ (croissance) : il a une borne supérieure $s \leq f(a)$.

— Soit $\varepsilon > 0$: il existe $x_0 < a$ avec $f(x_0) > s - \varepsilon$. Pour $x_0 < x < a$, par croissance,

$$s - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq s$$

— Donc $f(x) \rightarrow s$ quand $x \rightarrow a^-$.

— Exemple : pour la partie entière en 1, la limite à gauche vaut $0 < E(1) = 1$: l'écart est un « saut ». Une fonction monotone ne peut avoir que des discontinuités de ce type.

Réponse. Limite à gauche = $\sup \{f(x), x < a\} \leq f(a)$.

Correction de l'exercice 13 - Arctangente d'une somme

On pose $\alpha = \arctan \frac{1}{2}$ et $\beta = \arctan \frac{1}{3}$; ils sont dans $]0; \frac{\pi}{4}[$ (car $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ sont < 1), donc $\alpha + \beta \in]0; \frac{\pi}{2}[$.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$$

— $\alpha + \beta$ est l'angle de $]0; \frac{\pi}{2}[$ de tangente 1 : c'est $\frac{\pi}{4}$.

— L'étape « localiser l'angle » est indispensable : $\tan$ n'est injective que sur un intervalle de longueur π .

Réponse. $\tan(\alpha + \beta) = 1$ avec $\alpha + \beta \in]0; \frac{\pi}{2}[$.

Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux ?

a) **Vrai** : réciproque de $\sin$ restreinte, strictement croissante, à $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

b) **Vrai** : par définition, $\arctan x$ est un angle dont la tangente vaut x .

c) **Faux** : $\arctan(\tan \pi) = \arctan 0 = 0 \neq \pi$. C'est vrai seulement pour $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

d) **Vrai** : une bijection continue sur un intervalle est strictement monotone, et sa réciproque est continue.

$$f \text{ continue, strictement monotone sur } I \Rightarrow f^{-1} \text{ continue sur } f(I)$$

Réponse. a) vrai · b) vrai · c) faux · d) vrai.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : la réciproque de $x + \arctan x$

a) f est continue, strictement croissante (somme de deux fonctions strictement croissantes), de limites $\pm\infty$: bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b) $f(0) = 0$ et $f(1) = 1 + \frac{\pi}{4}$: donc $g(0) = 0$ et $g(1 + \frac{\pi}{4}) = 1$.

c) Posons $x = g(y)$, qui tend vers $+\infty$ quand $y \rightarrow +\infty$ (g croissante et non majorée). Alors $y = x + \arctan x$, et

$$\frac{g(y)}{y} = \frac{x}{x + \arctan x} = \frac{1}{1 + \frac{\arctan x}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

— car $\arctan x$ est borné. Ainsi, $g(y)$ est « presque » égal à y pour y grand.

Réponse. b) 0 et 1 · c) $\frac{g(y)}{y} \rightarrow 1$.