

Plaquette 1 - Calculs de limites, continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Limites et continuité — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Limites usuelles en 0.

$$\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 \quad \frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1 \quad \frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow 1$$

$$\frac{\tan x}{x} \rightarrow 1 \quad \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \rightarrow \alpha$$

Croissances comparées en $+\infty$: $\ln x \ll x^\alpha \ll e^x$; en 0^+ : $x^\alpha \ln x \rightarrow 0$ pour $\alpha > 0$.

Formes indéterminées : $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 . Techniques : factorisation, quantité conjuguée, changement de variable, taux de variation, exponentielle du logarithme.

Continuité.

- f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$; équivalent séquentiel : $x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a)$.
- **Opérations** : somme, produit, quotient (dénominateur non nul), composée de fonctions continues.
- **Prolongement par continuité** : si f admet une limite finie ℓ en $a \notin D_f$, on pose $f(a) = \ell$.

Théorèmes fondamentaux.

- **TVI** : f continue sur $[a; b]$ prend toute valeur entre $f(a)$ et $f(b)$. **Corollaire** : si $f(a)f(b) < 0$, f s'annule sur $]a; b[$.
- **Version stricte monotonie** : si f est continue et **strictement monotone** sur $[a; b]$, elle réalise une **bijection** sur $[f(a); f(b)]$ et l'équation $f(x) = k$ a une **unique** solution.
- **Bornes atteintes** : f continue sur un **segment** est bornée et atteint ses bornes.
- **Théorème de la bijection** : la réciproque d'une bijection continue strictement monotone est continue, de même sens de monotonie.

Correction de l'exercice 1 - Forme 0/0 polynomiale

- **Vérification de la forme** : numérateur et dénominateur s'annulent en 2 — forme $\frac{0}{0}$.
- **Factorisation** : $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ et $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.
- On **simplifie** par $x - 2$ (licite pour $x \neq 2$) :

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x + 2}{x - 3}$$

- **Limite** : en $x = 2$, cela vaut $\frac{4}{-1} = -4$.
- **Contrôle numérique** : en $x = 2,01$, le quotient vaut $\frac{0,0401}{-0,0099} \approx -4,051 \checkmark$
- **Méthode** : dès qu'un facteur $(x - a)$ annule les deux termes, on le factorise et on simplifie — c'est le réflexe de base pour $\frac{0}{0}$.

Réponse. La limite vaut -4 .

Correction de l'exercice 2 - Quantité conjuguée

— **Multiplication par le conjugué** $\sqrt{1+x} + 1$:

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{(1+x) - 1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1}$$

— **Limite** : en $x = 0$, cela vaut $\frac{1}{2}$.

— **Contrôle** en $x = 0,01$: $\frac{\sqrt{1,01} - 1}{0,01} = \frac{0,0049876}{0,01} \approx 0,4988 \checkmark$

— **Lecture alternative** : c'est le **taux de variation** de $\sqrt{\cdot}$ en 1, donc la dérivée $\frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$ ✓

— **Généralisation** : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ — ici $\alpha = \frac{1}{2}$.

Réponse. La limite vaut $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 3 - Limites trigonométriques

On ramène chaque facteur aux limites de référence.

$$\frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{5x}{\tan 5x} \times \frac{3x}{5x}$$

— Les deux premiers facteurs tendent vers 1 (limites usuelles avec $3x \rightarrow 0$ et $5x \rightarrow 0$).

— Le troisième est constant, égal à $\frac{3}{5}$.

— **Limite** : $\frac{3}{5} = 0,6$.

— **Contrôle** en $x = 0,001$: $\frac{\sin 0,003}{\tan 0,005} \approx \frac{0,0029999}{0,0050000} \approx 0,59999 \checkmark$

— **Technique** : multiplier et diviser par l'argument pour faire apparaître $\frac{\sin u}{u}$, puis regrouper les constantes.

Réponse. La limite vaut $\frac{3}{5}$.

Correction de l'exercice 4 - Croissances comparées

— **Première limite** : l'exponentielle **domine** toute puissance, donc $\frac{x^2}{e^x} \rightarrow 0$.

— **Contrôle** : en $x = 10$, $\frac{100}{22026} \approx 0,0045$; en $x = 20$, $\frac{400}{4,85 \times 10^8} \approx 8,2 \times 10^{-7} \checkmark$

— **Seconde limite** : forme $0 \times (-\infty)$. Par croissances comparées, $x \ln x \rightarrow 0^-$.

— **Justification par changement de variable** : posons $x = e^{-t}$ avec $t \rightarrow +\infty$. Alors $x \ln x = -te^{-t} \rightarrow 0 \checkmark$

— **Contrôle** : en $x = 0,01$, $x \ln x = 0,01 \times (-4,605) \approx -0,046$; en $x = 10^{-6}$, environ $-1,4 \times 10^{-5} \checkmark$

— **Hiérarchie** : au voisinage de 0^+ , toute puissance positive de x « écrase » le logarithme.

Réponse. Les deux limites valent 0.

Correction de l'exercice 5 - Prolongement par continuité

— f n'est pas définie en 1 (dénominateur nul), mais pour $x \neq 1$:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$$

— **Limite** : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, finie.

— **Prolongement** : en posant $\tilde{f}(1) = 2$, la fonction devient **continue** sur $\mathbb{R}$ — c'est même la fonction affine $x \mapsto x+1$.

— **Contre-exemple pour comparaison** : $g(x) = \frac{1}{x-1}$ n'admet **pas** de limite finie en 1 (elle tend vers $\pm\infty$), donc **aucun** prolongement continu.

— **Critère** : le prolongement existe si et seulement si la limite existe et est **finie**.

— **Graphiquement** : la courbe de f est la droite $y = x+1$ **privée du point** $(1, 2)$ — le prolongement « rebouche le trou ».

Réponse. Oui : $\tilde{f}(1) = 2$, et $\tilde{f}(x) = x+1$.

Correction de l'exercice 6 - Continuité d'une fonction par morceaux

— **Continuité sur** $] - \infty ; 2[$ **et** $]2 ; +\infty[$: chaque morceau est polynomial, donc continu ✓

— **Seul point à examiner** : $x = 2$.

— **Limite à gauche** : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 + 1 = 5 = f(2)$.

— **Limite à droite** : $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2a - 1$.

— **Condition de continuité** : $2a - 1 = 5$, donc $a = 3$.

— **Vérification** : avec $a = 3$, le second morceau vaut $3 \times 2 - 1 = 5$ en 2 ✓

— **Remarque** : la fonction obtenue est continue mais **non dérivable** en 2 (dérivées 4 à gauche, 3 à droite) — continuité et dérivabilité sont deux exigences distinctes.

Réponse. $a = 3$.

Correction de l'exercice 7 - Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f(x) = x^3 + x - 3$, **continue** sur $[1 ; 2]$ (polynôme).

— $f(1) = 1 + 1 - 3 = -1 < 0$ et $f(2) = 8 + 2 - 3 = 7 > 0$.

— Le **corollaire du TVI** donne l'existence d'une racine $\alpha \in]1 ; 2[$.

— **Unicité** : $f(x) = 3x^2 + 1 > 0$, donc f est **strictement croissante** — la racine est unique.

Encadrement par dichotomie.

— $f(1,2) = 1,728 + 1,2 - 3 = -0,072 < 0$.

— $f(1,3) = 2,197 + 1,3 - 3 = 0,497 > 0$.

— Donc $\alpha \in]1,2 ; 1,3[$.

— **Précision supplémentaire** : $f(1,21) \approx -0,0186$ et $f(1,22) \approx 0,0356$, donc $\alpha \approx 1,213$.

— **Méthode** : TVI pour l'existence, monotonie pour l'unicité, dichotomie pour la valeur.

Réponse. Racine unique $\alpha \in]1,2 ; 1,3[$, soit $\alpha \approx 1,213$.

Correction de l'exercice 8 - Bornes atteintes

— f est **continue sur un segment** : elle est bornée et **atteint ses bornes**.

— **Points critiques** : $f(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$, nulle en $x = \pm 1$.

— **Valeurs à comparer** (points critiques **et** bornes) :

— $f(-2) = -8 + 6 = -2$;

- $f(-1) = -1 + 3 = 2$;
- $f(1) = 1 - 3 = -2$;
- $f(2) = 8 - 6 = 2$.
- **Maximum** : 2, atteint en $x = -1$ **et** $x = 2$.
- **Minimum** : -2, atteint en $x = 1$ **et** $x = -2$.
- **Méthode systématique** : sur un segment, les extremums sont atteints soit en un **point critique intérieur**, soit **au bord** — il faut examiner les deux.

Réponse. Maximum 2 (en -1 et 2) ; minimum -2 (en 1 et -2).

Correction de l'exercice 9 - Bijection et réciproque

- **Continuité et monotonie** : f est dérivable, $f(x) = 1 + e^x > 0$: **strictement croissante**.
- **Limites** : $f(x) \rightarrow -\infty$ en $-\infty$ (le terme x domine) et $f(x) \rightarrow +\infty$ en $+\infty$.
- Le **théorème de la bijection** donne : f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ ✓
- **Calcul de $f^{-1}(1)$** : on résout $x + e^x = 1$. Par lecture, $x = 0$ convient ($0 + 1 = 1$).
- Donc $f^{-1}(1) = 0$.
- **Continuité de la réciproque** : f^{-1} est continue et **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.
- **Non-expressibilité** : f^{-1} ne s'écrit pas avec les fonctions usuelles (c'est la fonction W de Lambert à un changement près) — mais son existence et sa régularité sont garanties par le théorème.

Réponse. Bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$; $f^{-1}(1) = 0$.

Correction de l'exercice 10 - Limite en l'infini avec racine

- **Forme $\infty - \infty$** : on utilise la **quantité conjuguée**.

$$\sqrt{x^2 + x} - x = \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x}$$

- On **factorise par x** au dénominateur (avec $x > 0$, donc $\sqrt{x^2} = x$) :

$$= \frac{x}{x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1}$$

- **Limite** : $\frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$.
- **Contrôle** : en $x = 1000$, $\sqrt{1001000} - 1000 \approx 0,49988$ ✓
- **Interprétation géométrique** : la courbe $y = \sqrt{x^2 + x}$ admet l'asymptote oblique $y = x + \frac{1}{2}$ en $+\infty$.
- **Attention en $-\infty$** : il faudrait écrire $\sqrt{x^2} = |x| = -x$, ce qui change complètement le calcul.

Réponse. La limite vaut $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 11 - Forme exponentielle

- **Forme 1^∞** : on passe par l'**exponentielle du logarithme**.

$$\left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right)$$

- **Étude de l'exposant** : posons $u = \frac{2}{x} \rightarrow 0$. Alors

$$x \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) = \frac{2}{u} \ln(1+u) \times \frac{u}{u} \cdot 1 = 2 \times \frac{\ln(1+u)}{u} \rightarrow 2$$

- Par continuité de $\exp$: la limite est $e^2 \approx 7,389$.
- **Contrôle** : en $x = 100$, $(1,02)^{100} \approx 7,245$; en $x = 10^4$, $\approx 7,387$ ✓
- **Formule générale** : $\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \rightarrow e^a$ — à reconnaître immédiatement.
- **Application** : c'est la formule des **intérêts composés continus**.

Réponse. La limite vaut $e^2 \approx 7,39$.

Correction de l'exercice 12 - Continuité et caractérisation séquentielle

Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque.

- **Cas a rationnel** : $f(a) = 1$. Par **densité des irrationnels**, il existe une suite (x_n) d'irrationnels tendant vers a . Alors $f(x_n) = 0 \rightarrow 0 \neq 1 = f(a)$.
- **Cas a irrationnel** : $f(a) = 0$. Par **densité de $\mathbb{Q}$** , il existe une suite de rationnels $(y_n) \rightarrow a$, avec $f(y_n) = 1 \rightarrow 1 \neq 0$.
- Dans les deux cas, la **caractérisation séquentielle** est violée : f n'est continue en **aucun** point ✓
- **Nom** : c'est la **fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$** , exemple canonique de fonction « partout discontinue ».
- **Variante instructive** : $g(x) = x \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ est continue **uniquement en 0** — la discontinuité peut être localisée.
- **Utilité** : ces contre-exemples montrent que la continuité est une propriété fine, non réductible à une intuition graphique.

Réponse. Densité de $\mathbb{Q}$ et de son complémentaire : aucune continuité.

Correction de l'exercice 13 - Revenir à la définition

- Pour $f(x) = 3x - 1$: $|f(x) - 5| = 3|x - 2|$. Soit $\varepsilon > 0$; avec $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, $|x - 2| \leq \delta$ entraîne $|f(x) - 5| \leq \varepsilon$.
- Pour x^2 : $|x^2 - 1| = |x - 1| |x + 1|$. Si $|x - 1| \leq 1$, alors $|x + 1| \leq 3$, donc

$$|x^2 - 1| \leq 3|x - 1|$$
- Soit $\varepsilon > 0$: $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{3}\right)$ convient.
- Le « $\min(1, \dots)$ » sert à borner d'abord le facteur $|x + 1|$: c'est la technique standard pour un produit.

Réponse. $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$; $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{3})$.

Correction de l'exercice 14 - Un point fixe

On pose $g(x) = f(x) - x$, continue sur $[0; 1]$.

- $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$, car f prend ses valeurs dans $[0; 1]$.
- Par le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule :

$$\exists c \in [0; 1], f(c) = c$$

- Sur $[0; 1[$ c'est faux : $f(x) = \frac{1+x}{2}$ envoie $[0; 1[$ dans $\left[\frac{1}{2}; 1\right[$, et $f(x) = x \Leftrightarrow x = 1$, qui n'est pas dans l'intervalle. Le caractère **fermé** du segment est essentiel.

Réponse. TVI appliqué à $f(x) - x$; faux sur $[0; 1[$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : équation fonctionnelle

On introduit la fonction auxiliaire

$$g(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x) \quad \text{sur } \left[0; \frac{1}{2}\right]$$

- g est **continue** (différence de composées de fonctions continues).
- **Valeurs aux bornes** :
- $g(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)$;
- $g\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right)$ (en utilisant $f(1) = f(0)$).
- **Observation clé** : $g\left(\frac{1}{2}\right) = -g(0)$ — les deux valeurs sont **opposées**.
- **Conclusion** : si $g(0) = 0$, on prend $c = 0$. Sinon, $g(0)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)$ sont de **signes contraires** ; le TVI fournit c avec $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right)$ ✓
- **Interprétation** : sur un trajet fermé, il existe toujours deux points **diamétralement opposés** (en paramètre) où la fonction prend la même valeur.
- **Généralisation** : le résultat vaut pour tout écart $\frac{1}{n}$, et c'est un cas particulier du théorème de Borsuk-Ulam en dimension 1.

Réponse. Poser $g(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x)$: $g\left(\frac{1}{2}\right) = -g(0)$, puis TVI.