

Plaque 2 - Limites de fonctions : existence, calcul, changement de variable

Limites et continuité — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Limites de fonctions.

- Caractérisation séquentielle : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ si et seulement si, pour toute suite $x_n \rightarrow a$, $f(x_n) \rightarrow \ell$.
- La limite en a existe si et seulement si les limites à gauche et à droite existent et sont égales (et valent $f(a)$ si f est définie en a).
- Taux d'accroissement : si f est dérivable en a ,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

- Références : $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$, $\frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1$, $\frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0$; $x \ln x \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$.
- « Borné $\times$ tend vers 0 » tend vers 0.

Correction de l'exercice 1 - À gauche et à droite

- Pour $x > 0$, $f(x) = 1$; pour $x < 0$, $f(x) = -1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

- f n'a pas de limite en 0.
- Pour E : sur $[0; 1[$, $E(x) = 0$; sur $[1; 2[$, $E(x) = 1$. Limite à gauche en 1 : 0 ; limite à droite : 1 = $E(1)$.
- E est continue à droite en 1, pas à gauche : elle n'a pas de limite en 1.

Réponse. Pas de limite (± 1) ; E : 0 à gauche, 1 à droite.

Correction de l'exercice 2 - Un produit qui s'écrase

Le facteur $\sin \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0, mais il est borné :

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

- Par encadrement, la limite vaut 0.
- On peut donc prolonger $x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$ par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
- Interprétation graphique : la courbe oscille de plus en plus vite, mais entre les droites $y = x$ et $y = -x$, qui se rejoignent en 0.

Réponse. $|x \sin \frac{1}{x}| \leq |x| \rightarrow 0$.

Correction de l'exercice 3 - Une fonction sans limite

On utilise la caractérisation séquentielle avec deux suites qui tendent vers 0.

- $x_n = \frac{1}{n\pi} \rightarrow 0$ et $\sin \frac{1}{x_n} = \sin(n\pi) = 0$.

$$- y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \rightarrow 0 \text{ et}$$

$$\sin \frac{1}{y_n} = \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) = 1$$

- Si la fonction avait une limite ℓ en 0, on aurait $\ell = 0$ et $\ell = 1$: contradiction.
- Comparaison avec l'exercice précédent : c'est le facteur x qui « écrase » les oscillations.

Réponse. $x_n = \frac{1}{n\pi}$ donne 0, $y_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}$ donne 1.

Correction de l'exercice 4 - Fractions rationnelles à l'infini

À l'infini, une fraction rationnelle se comporte comme le quotient de ses termes de plus haut degré.

$$f(x) = \frac{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = x \times \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$- g(x) = \frac{1}{x} \times \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x^2}} \rightarrow 0 \times 2 = 0.$$

- Règle : degré du numérateur supérieur : $\pm\infty$; égal : quotient des coefficients dominants ; inférieur : 0.

Réponse. $f \rightarrow +\infty$; $g \rightarrow 0$.

Correction de l'exercice 5 - Changer de variable

- On pose $t = \frac{1}{x}$, qui tend vers 0^+ quand $x \rightarrow +\infty$:

$$x(e^{1/x} - 1) = \frac{e^t - 1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$$

- On pose $u = x^2$, qui tend vers 0 (en restant > 0 pour $x \neq 0$) : $\frac{\ln(1+u)}{u} \rightarrow 1$.
- Le changement de variable repose sur la composition des limites : si $u(x) \rightarrow 0$ et $\frac{\ln(1+u)}{u} \rightarrow 1$ quand $u \rightarrow 0$, la composée tend vers 1.

Réponse. 1 et 1.

Correction de l'exercice 6 - La limite qui définit e

On passe à l'exponentielle.

$$(1+x)^{1/x} = \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} e^1 = e$$

- Pour la seconde, avec $t = \frac{3}{x} \rightarrow 0$: $x \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right) = 3 \times \frac{\ln(1+t)}{t} \rightarrow 3$.
- Donc $\left(1 + \frac{3}{x}\right)^x \rightarrow e^3$.
- La continuité de l'exponentielle permet de « passer la limite à l'intérieur ».

Réponse. e ; e^3 .

Correction de l'exercice 7 - La forme 0 puissance 0

On écrit $x^x = e^{x \ln x}$. Par croissances comparées, $x \ln x \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$:

$$x^x = e^{x \ln x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} e^0 = 1$$

- De même, $x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x} \ln x}$ et $\sqrt{x} \ln x = \frac{\ln x}{x^{-1/2}} \rightarrow 0$ (croissances comparées) : la limite vaut 1.
- « 0^0 » est une forme indéterminée : ici elle vaut 1, mais $(e^{-1/x})^x = e^{-1}$ montre qu'elle peut valoir autre chose.

Réponse. 1 et 1.

Correction de l'exercice 8 - Deux taux usuels

On fait apparaître les deux limites de référence :

$$\frac{e^{2x} - 1}{\sin 3x} = \frac{e^{2x} - 1}{2x} \times \frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{2x}{3x}$$

- Le premier facteur tend vers 1 (avec $u = 2x$), le deuxième vers 1 (avec $v = 3x$), le troisième vaut $\frac{2}{3}$.
- La limite est $\frac{2}{3}$.
- Retenir : près de 0, $e^{2x} - 1 \approx 2x$ et $\sin 3x \approx 3x$.

Réponse. $\frac{2}{3}$.

Correction de l'exercice 9 - Reconnaître une dérivée

Ce sont des taux d'accroissement : $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $\ln 1 = 0$.

$$\frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}} \xrightarrow{x \rightarrow \pi/2} \cos' \left(\frac{\pi}{2} \right) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1$$

- De même, $\frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} \rightarrow \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$.
- Méthode : une forme $\frac{0}{0}$ dont le numérateur est $f(x) - f(a)$ et le dénominateur $x - a$ est un nombre dérivé.

Réponse. -1 ; 1 .

Correction de l'exercice 10 - Des perturbations bornées

On divise par x :

$$\frac{x + \cos x}{x - \sin x} = \frac{1 + \frac{\cos x}{x}}{1 - \frac{\sin x}{x}}$$

- Comme $|\frac{\cos x}{x}| \leq \frac{1}{x} \rightarrow 0$, et de même pour $\frac{\sin x}{x}$, la limite vaut $\frac{1+0}{1-0} = 1$.
- Les fonctions $\cos x$ et $\sin x$ n'ont pas de limite en $+\infty$, mais bornées, elles sont négligeables devant x .

Réponse. 1.

Correction de l'exercice 11 - Le cosinus à l'infini

On choisit deux suites qui tendent vers $+\infty$:

$$x_n = 2n\pi \Rightarrow \cos x_n = 1 \quad y_n = \pi + 2n\pi \Rightarrow \cos y_n = -1$$

- Si $\cos$ avait une limite ℓ en $+\infty$, la caractérisation séquentielle donnerait $\ell = 1$ et $\ell = -1$: contradiction.

— En revanche, $\frac{\cos x}{x} \rightarrow 0$ en $+\infty$ (borné sur une quantité qui tend vers l'infini).

Réponse. $\cos(2n\pi) = 1$ et $\cos(\pi + 2n\pi) = -1$.

Correction de l'exercice 12 - Une limite à paramètre

Le dénominateur tend vers 0. Pour une limite finie, il faut que le numérateur tende vers 0 aussi : $4 + 2a - 6 = 0$, soit $a = 1$. Sinon, le numérateur tend vers $2a - 2 \neq 0$ et $|f| \rightarrow +\infty$.

— Pour $a = 1$: $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$, donc

$$f(x) = x + 3 \xrightarrow{x \rightarrow 2} 5$$

— Méthode : une condition nécessaire (forme $\frac{0}{0}$), puis une factorisation par $x - 2$.

Réponse. $a = 1$, limite 5.

Correction de l'exercice 13 - Encadrer une partie entière

On part de $t - 1 < E(t) \leq t$.

— Pour $x > 0$: $\frac{x-1}{x} < \frac{E(x)}{x} \leq 1$, et $\frac{x-1}{x} \rightarrow 1$: la limite vaut 1.

— Avec $t = \frac{1}{x}$:

$$\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} \Rightarrow 1 - x < x E\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

— (en multipliant par $x > 0$), donc la limite vaut 1.

— La partie entière n'est pas continue, mais l'encadrement suffit.

Réponse. 1 et 1.

Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux ?

a) **Vrai** : $||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l|$.

b) **Faux** : $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ vérifie $f(1/n) = \sin(n\pi) = 0$, mais n'a pas de limite en 0. Une seule suite ne suffit pas.

c) **Vrai** : $|f(x)g(x)| \leq M|g(x)| \rightarrow 0$.

d) **Faux** : c'est une forme indéterminée ; avec $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{x}$:

$$f(x)g(x) = \sin \frac{1}{x}$$

— qui n'a pas de limite en 0.

Réponse. a) vrai · b) faux · c) vrai · d) faux.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : deux limites en 0

a) Quantité conjuguée :

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \frac{(1+x) - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \rightarrow 1$$

— b) Avec $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$: $x^2(1 - \cos t) = \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{t}{2}}{t^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \right)^2 \rightarrow \frac{1}{2}$.

— Contrôle numérique pour a) : $x = 0,01$ donne $\approx 1,0000125$.

Réponse. a) 1 · b) $\frac{1}{2}$.