

## Plaqueette 4 - Valeurs intermédiaires et bornes atteintes : applications

### Limites et continuité — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

#### Boîte à outils

##### Théorèmes sur les fonctions continues.

- TVI : si  $f$  est continue sur  $[a; b]$  et  $k$  est compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , alors
 
$$\exists c \in [a; b], f(c) = k$$
- Conséquence : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- Bornes atteintes :  $f$  continue sur le segment  $[a; b]$  admet un minimum et un maximum :  $f([a; b]) = [m; M]$ .
- Bijection :  $f$  continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  réalise une bijection de  $I$  sur l'intervalle  $f(I)$ , et sa réciproque est continue.
- Dichotomie : après  $n$  étapes sur  $[a; b]$ , la solution est localisée à  $\frac{b-a}{2^n}$  près.

#### Correction de l'exercice 1 - Degré impair

Soit  $P(x) = a_n x^n + \dots$  avec  $n$  impair et, par exemple,  $a_n > 0$ . Alors  $P(x) \sim a_n x^n$  à l'infini :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$$

- Il existe donc  $a$  avec  $P(a) < 0$  et  $b$  avec  $P(b) > 0$  ;  $P$  étant continue, le TVI donne une racine entre  $a$  et  $b$ . (Si  $a_n < 0$ , on raisonne sur  $-P$ .)
- Application :  $P(-2) = -8 - 16 + 7 = -17 < 0$  et  $P(0) = 7 > 0$  : une racine dans  $] -2; 0[$ .
- Pour un degré pair, c'est faux :  $x^2 + 1$  n'a pas de racine réelle.

**Réponse.** Limites  $\mp\infty$  en  $\mp\infty$  puis TVI ; racine dans  $] -2; 0[$ .

#### Correction de l'exercice 2 - Localiser par dichotomie

$f(x) = x^5 + x - 1$  est continue, et  $f(x) = 5x^4 + 1 > 0$  :  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , donc s'annule au plus une fois.

- $f(0) = -1 < 0$  et  $f(1) = 1 > 0$  : par le TVI,  $\alpha \in ]0; 1[$  existe (et elle est unique).
- Dichotomie (on garde la moitié où  $f$  change de signe) :  $f(0,5) < 0$  ;  $f(0,75) \approx -0,013 < 0$  ; puis on affine :

$$f(0,7) \approx -0,132 < 0 \quad f(0,8) \approx 0,128 > 0$$

- Donc  $0,7 < \alpha < 0,8$  (en fait  $\alpha \approx 0,7549$ ).

**Réponse.** Unique,  $\alpha \in ]0,7; 0,8[$  ( $\alpha \approx 0,755$ ).

#### Correction de l'exercice 3 - Une équation transcendante

On pose  $g(x) = e^x + x - 2$ , continue, de dérivée  $e^x + 1 > 0$  : strictement croissante, donc au plus une solution.

- $g(0) = -1 < 0$  et  $g(1) = e - 1 > 0$  : une solution existe dans  $]0; 1[$ .
- On affine :

$$g(0,4) \approx -0,108 < 0 \quad g(0,5) \approx 0,149 > 0$$

- La solution est dans  $]0,4 ; 0,5[$  (environ 0,443).
- Aucune formule ne donne cette solution : le TVI prouve qu'elle existe, la dichotomie l'approche.

**Réponse.** Unique, dans  $]0,4 ; 0,5[$ .

### Correction de l'exercice 4 - Trois racines

On calcule quelques valeurs :

$$P(-2) = -1 \quad P(0) = 1 \quad P(1) = -1 \quad P(2) = 3$$

- Trois changements de signe : par le TVI, une racine dans  $] - 2 ; 0[$ , une dans  $]0 ; 1[$ , une dans  $]1 ; 2[$ .
- Un polynôme de degré 3 a au plus 3 racines : il en a donc exactement trois.
- On peut aussi le voir sur les variations :  $P'(x) = 3(x^2 - 1)$  ; maximum local  $P(-1) = 3 > 0$ , minimum local  $P(1) = -1 < 0$ .

**Réponse.** Racines dans  $] - 2 ; 0[$ ,  $]0 ; 1[$  et  $]1 ; 2[$ .

### Correction de l'exercice 5 - Signe constant

**Par l'absurde** : s'il existait  $a, b \in I$  avec  $f(a) < 0 < f(b)$ , le TVI appliqué entre  $a$  et  $b$  (qui est inclus dans  $I$ , car  $I$  est un intervalle) donnerait

$$\exists c \text{ entre } a \text{ et } b, f(c) = 0$$

- ce qui contredit l'hypothèse. Donc  $f$  est de signe constant.
- Sur une réunion d'intervalles, c'est faux :  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue, ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^*$ , mais change de signe.
- Application courante : pour étudier le signe d'une fonction continue, il suffit de connaître ses zéros et une valeur entre deux zéros consécutifs.

**Réponse.** TVI par l'absurde ; faux sur  $\mathbb{R}^*$  avec  $\frac{1}{x}$ .

### Correction de l'exercice 6 - Image d'un intervalle

$f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc  $f(\mathbb{R})$  est un intervalle. Étudions ses valeurs extrêmes :

$$\frac{1}{2} - f(x) = \frac{1 + x^2 - 2x}{2(1 + x^2)} = \frac{(x - 1)^2}{2(1 + x^2)} \geq 0$$

- Donc  $f(x) \leq \frac{1}{2}$ , avec égalité en  $x = 1$  ; par imparité,  $f(x) \geq -\frac{1}{2}$ , avec égalité en  $x = -1$ .
- $f(\mathbb{R})$  est un intervalle contenant  $-\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{2}$ , inclus dans  $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$  :

$$f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$$

**Réponse.**  $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ .

### Correction de l'exercice 7 - Bornes atteintes sur un segment

$f$  est continue sur le segment  $[0 ; 3]$  : par le théorème des bornes atteintes, elle a un minimum et un maximum.

- $f(x) = (1 - x)e^{-x}$  :  $f$  croît sur  $[0 ; 1]$  et décroît sur  $[1 ; 3]$ .
- Maximum en 1 :  $f(1) = \frac{1}{e} \approx 0,368$ .
- Minimum aux bornes :  $f(0) = 0$  et  $f(3) = 3e^{-3} \approx 0,149$  ; le minimum est 0, en 0.

$$f([0; 3]) = \left[0; \frac{1}{e}\right]$$

**Réponse.**  $\max = \frac{1}{e}$  (en 1),  $\min = 0$  (en 0).

### Correction de l'exercice 8 - Pourquoi un segment ?

- $f(x) = \frac{1}{x}$  sur  $]0; 1]$  : continue, et  $f(x) \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow 0^+$ . L'intervalle n'est pas fermé en 0.
- $g(x) = x$  sur  $]0; 1[$  : bornée,  $\inf = 0$  et  $\sup = 1$ , jamais atteints, car 0 et 1 n'appartiennent pas à l'intervalle.

$$g([0; 1]) = ]0; 1[$$

- Le théorème exige un intervalle **fermé** et **borné** :  $[0; +\infty[$  ne convient pas non plus ( $x \mapsto x$  n'y est pas majorée).

**Réponse.**  $\frac{1}{x}$  sur  $]0; 1]$  ;  $x$  sur  $]0; 1[$  : l'intervalle n'est pas un segment.

### Correction de l'exercice 9 - Minimum sur $\mathbb{R}$

Par les limites, il existe  $A > 0$  tel que  $f(x) > f(0)$  dès que  $|x| > A$ .

- Sur le segment  $[-A; A]$ ,  $f$  est continue : elle y atteint un minimum  $m = f(c)$ , avec  $m \leq f(0)$  (car  $0 \in [-A; A]$ ).
- Hors du segment,  $f(x) > f(0) \geq m$ . Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(c)$$

- $f$  atteint son minimum en  $c$ . Exemple :  $f(x) = x^4 - 3x$  a un minimum sur  $\mathbb{R}$ , sans qu'on ait besoin de le calculer.

**Réponse.** On se ramène au segment  $[-A; A]$  où  $f > f(0)$  en dehors.

### Correction de l'exercice 10 - La corde universelle

On pose  $g(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x)$ , continue sur  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ .

$$g(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right) = -g(0)$$

- $g(0)$  et  $g\left(\frac{1}{2}\right)$  sont opposés : ou bien  $g(0) = 0$  (et  $c = 0$  convient), ou bien ils sont de signes contraires et le TVI donne  $c$  avec  $g(c) = 0$ .
- Interprétation : un cycliste qui fait une boucle en 1 heure passe, à une demi-heure d'intervalle, deux fois à la même altitude.

**Réponse.**  $g(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x)$  vérifie  $g\left(\frac{1}{2}\right) = -g(0)$  : TVI.

### Correction de l'exercice 11 - Le randonneur

On note  $m(t)$  et  $d(t)$  l'altitude à l'instant  $t \in [8; 12]$  à la montée et à la descente, fonctions continues. On pose  $h(t) = m(t) - d(t)$ .

- À 8 h :  $m(8)$  est l'altitude du départ,  $d(8)$  celle du sommet :  $h(8) \leq 0$ .
- À 12 h :  $m(12)$  est le sommet,  $d(12)$  le départ :  $h(12) \geq 0$ .

$$\exists t \in [8; 12], h(t) = 0$$

- par le TVI. À cet instant, il est à la même altitude, donc au même point du chemin (en supposant que le chemin monte sans redescendre).

- Astuce visuelle : imaginer deux randonneurs partant le même jour, l'un d'en bas, l'autre d'en haut ; ils se croisent forcément.

**Réponse.** TVI appliqué à  $m(t) - d(t)$ .

### Correction de l'exercice 12 - Nombre d'étapes de dichotomie

Après  $n$  étapes, l'intervalle a pour longueur  $\frac{1}{2^n}$ . On veut

$$\frac{1}{2^n} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow 2^n \geq 1\,000$$

- Comme  $2^9 = 512$  et  $2^{10} = 1\,024$ , il faut 10 étapes.
- Pour  $10^{-6}$  :  $2^{20} = 1\,048\,576 \geq 10^6$  et  $2^{19} = 524\,288 < 10^6$  : 20 étapes.
- Chaque étape fait gagner un chiffre binaire ; environ 3,3 étapes par chiffre décimal.

**Réponse.** 10 étapes ; 20 étapes.

### Correction de l'exercice 13 - Deux fonctions qui se croisent

$h = f - g$  est continue,  $h(a) \leq 0$  et  $h(b) \geq 0$  : par le TVI, il existe  $c \in [a ; b]$  avec

$$h(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = g(c)$$

- Application avec  $f(x) = x$  et  $g(x) = \cos x$  :  $f(0) = 0 \leq 1 = g(0)$  et  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \geq 0 = g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ . Il existe donc  $c$  avec  $\cos c = c$ .
- Il est unique, car  $x - \cos x$  est strictement croissante (dérivée  $1 + \sin x > 0$  sur  $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ ) ;  $c \approx 0,739$ .

**Réponse.** TVI sur  $f - g$  ;  $\cos c = c$  avec  $c \approx 0,739$ .

### Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux ?

- a) **Faux** : « au moins une fois ».  $\sin$  sur  $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{5\pi}{2}\right]$  change de signe et s'annule trois fois.
- b) **Vrai** : théorème des bornes atteintes.
- c) **Faux** :  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  pour  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$  prend toutes les valeurs intermédiaires sur tout intervalle, mais n'est pas continue en 0.
- d) **Vrai** : l'image est un intervalle (TVI) qui contient son minimum et son maximum (bornes atteintes) :

$$f([a ; b]) = [m ; M]$$

**Réponse.** a) faux · b) vrai · c) faux · d) vrai.

### Correction de l'exercice 15 - Synthèse : la réciproque de $x^3 + x$

- a)  $f$  est continue,  $f(x) = 3x^2 + 1 > 0$  : strictement croissante. Ses limites sont  $-\infty$  et  $+\infty$  ; par le TVI et la stricte monotonie :

$f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$

- b) On cherche  $x$  avec  $f(x) = y$  :  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 2$ ,  $f(2) = 10$ . Donc  $g(0) = 0$ ,  $g(2) = 1$ ,  $g(10) = 2$ .
- c) La réciproque d'une bijection continue strictement monotone sur un intervalle est continue (et strictement croissante).  $g$  est croissante et  $g(f(n)) = n$  pour tout  $n$  : elle n'est pas majorée, donc  $g(y) \rightarrow +\infty$ .

**Réponse.** a) bijection · b) 0, 1, 2 · c) continue,  $\lim_{+\infty} g = +\infty$ .