

Plaquette 3 - Continuité : exemples, contre-exemples et opérations

Limites et continuité — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Pour montrer qu'une fonction est **continue**, on invoque le plus souvent les **théorèmes généraux** (somme, produit, quotient, composée de fonctions continues) ; on ne revient à la définition qu'aux points « à problème » (raccord de morceaux, point où une formule n'est pas définie). Pour montrer qu'une fonction est **discontinue** en a , on trouve une suite $x_n \rightarrow a$ telle que $f(x_n)$ ne tende pas vers $f(a)$. Pour **prolonger par continuité** en a , on calcule la limite de f en a : si elle est finie, on la prend comme valeur en a .

Exercice 1 - Trois prolongements

Les fonctions $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$, $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ (sur $\mathbb{R}^*$) et $x \mapsto x \ln x$ (sur $]0; +\infty[$) sont-elles prolongeables par continuité en 0 ?

Exercice 2 - Choisir la valeur au point

Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$ pour $x \in [-3; +\infty[$, $x \neq 1$, et $f(1) = a$. Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue en 1 ?

Exercice 3 - Discontinuités de $x E(x)$

Étudier la continuité de $f(x) = x E(x)$ sur $[0; 3]$.

Exercice 4 - La fonction de Dirichlet

Soit $D(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $D(x) = 0$ sinon. Montrer que D n'est continue en aucun point.

Exercice 5 - Continue en un seul point

Soit $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon. Montrer que f est continue en 0 et discontinue partout ailleurs.

Exercice 6 - Une composée continue

Justifier que $f(x) = \ln(1 + e^x)$ et $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 - Valeur absolue et maximum

Soient f et g continues sur I . Montrer que $|f|$ est continue, puis que $\max(f, g)$ est continue. Montrer par un exemple que $|f|$ peut être continue sans que f le soit.

Exercice 8 - Somme et produit de discontinues

- a) Montrer que si f est continue en a et g discontinue en a , alors $f + g$ est discontinue en a .
- b) Le produit de deux fonctions discontinues peut-il être continu ?

Exercice 9 - Une propriété d'invariance

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $f(2x) = f(x)$ pour tout x . Montrer que f est constante.

Exercice 10 - Lipschitzienne donc continue

- a) Montrer qu'une fonction f vérifiant $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ pour tous x, y est continue.
- b) Montrer que $\sin$ vérifie cette propriété avec $k = 1$.

Exercice 11 - La racine carrée en 0

Montrer avec la définition que $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0 (à droite), puis en $a > 0$.

Exercice 12 - Raccorder avec deux paramètres

Soit $f(x) = ax + b$ pour $x < 0$, $f(x) = e^x$ pour $0 \leq x \leq 1$, et $f(x) = \frac{c}{x}$ pour $x > 1$. Trouver les conditions sur a, b, c pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 - Deux fonctions égales sur les rationnels

Soient f et g continues sur $\mathbb{R}$ telles que $f(r) = g(r)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$. Montrer que $f = g$. Le résultat reste-t-il vrai si f et g coïncident seulement sur $\mathbb{Z}$?

Exercice 14 - Vrai ou faux ?

- a) Si f est continue en a , alors f a une limite en a .
- b) Si f^2 est continue, alors f est continue.
- c) La composée de deux fonctions discontinues est discontinue.
- d) Une fonction continue sur $]0; 1]$ est bornée.

Exercice 15 - Synthèse : une fonction qui recolle ses sauts

Soit $h(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$ sur $\mathbb{R}$.

- a) Montrer que h est continue sur chaque intervalle $]n; n + 1[$.
- b) Montrer que h est continue en chaque entier n .
- c) Tracer l'allure de la courbe entre 0 et 2.