Plaquette 5 – Fonctions réciproques et problèmes de continuité

Limites et continuité — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle I réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$, et sa réciproque est continue, de même monotonie. C'est ainsi qu'on définit arctan, arcsin, arccos : on **restreint** tan, sin, cos à un intervalle où elles sont strictement monotones. Pour calculer une réciproque, on résout $f(x) = y$; pour simplifier $\arcsin(\sin x)$, on se ramène à l'intervalle de référence. Dans les problèmes, la continuité se combine avec le TVI, les bornes atteintes et la monotonie.

Exercice 1 – Valeurs de l'arctangente

Calculer $\arctan 1$, $\arctan\sqrt{3}$, $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, puis les limites de arctan en $\pm\infty$.

Exercice 2 – Le piège de arcsin(sin x)

Calculer $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ et $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{6}\right)$.

Exercice 3 – arccos(cos x) sur une période

Simplifier $\arccos(\cos x)$ pour $x \in [0\,;\pi]$, puis pour $x \in [\pi\,;2\pi]$. Tracer l'allure de $x \mapsto \arccos(\cos x)$ sur $[0\,;2\pi]$.

Exercice 4 – Une identité de l'arctangente

Montrer que pour $x > 0$, $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$. Que vaut cette somme pour $x < 0$?

Exercice 5 – La réciproque du sinus hyperbolique

Montrer que $\mathrm{sh}\colon x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et expliciter sa réciproque.

Exercice 6 – La fonction x|x|

Montrer que $f(x) = x|x|$ est une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer f^{-1}.

Exercice 7 – Une fonction périodique

Soit $f\colon\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et T-périodique ($T > 0$). Montrer que f est bornée et atteint ses bornes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Limites finies aux infinis

Soit f continue sur $\mathbb{R}$ ayant des limites finies en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que f est bornée. Atteint-elle forcément ses bornes ?

Exercice 9 – Un carré constant

Soit f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x)^2 = 1$ pour tout x. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Exercice 10 – Point fixe d'une fonction décroissante

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et décroissante. Montrer que f a un unique point fixe.

Exercice 11 – Injective sans être monotone

On admet qu'une fonction continue et injective sur un **intervalle** est strictement monotone. Montrer que $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue et injective sur $\mathbb{R}^*$ sans être monotone. Pourquoi n'est-ce pas contradictoire ?

Exercice 12 – Limites d'une fonction monotone

Soit f croissante sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que f a une limite à gauche en a, égale à $\sup\{f(x) \mid x < a\}$, et que cette limite est inférieure ou égale à $f(a)$.

Exercice 13 – Arctangente d'une somme

Montrer que $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 14 – Vrai ou faux ?

a) arcsin est croissante sur $[-1\,;1]$.
b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan x) = x$.
c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(\tan x) = x$ (quand $\tan x$ est défini).
d) La réciproque d'une bijection continue sur un intervalle est continue.

Exercice 15 – Synthèse : la réciproque de x + arctan x

Soit $f(x) = x + \arctan x$.

a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
b) On note $g = f^{-1}$. Calculer $g(0)$ et $g\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$.
c) Montrer que $\frac{g(y)}{y} \to 1$ quand $y \to +\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).