

Plaquette 1 - Calculs de limites, continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Limites et continuité — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

On lève les formes indéterminées (factorisation, conjugué, taux de variation, croissances comparées), on étudie la continuité et les **prolongements**, et on applique le **TVI** et le théorème des **bornes atteintes**.

Exercice 1 - Forme 0/0 polynomiale

Calculer $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$.

Exercice 2 - Quantité conjuguée

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$.

Exercice 3 - Limites trigonométriques

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\tan(5x)}$.

Exercice 4 - Croissances comparées

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$.

Exercice 5 - Prolongement par continuité

La fonction $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ est-elle prolongeable par continuité en 1 ?

Exercice 6 - Continuité d'une fonction par morceaux

Déterminer a pour que $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ ax - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 - Théorème des valeurs intermédiaires

Montrer que l'équation $x^3 + x - 3 = 0$ admet une solution dans $]1; 2[$, puis l'encadrer à 10^{-1} .

Exercice 8 - Bornes atteintes

Soit $f(x) = x^3 - 3x$ sur $[-2; 2]$. Déterminer son maximum et son minimum.

Exercice 9 - Bijection et réciproque

Montrer que $f(x) = x + e^x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, et calculer $f^{-1}(1)$.

Exercice 10 - Limite en l'infini avec racine

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$.

Exercice 11 - Forme exponentielle

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$.

Exercice 12 - Continuité et caractérisation séquentielle

Montrer que $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ n'est continue en aucun point.

Exercice 13 - Revenir à la définition

Montrer avec la définition « ε - δ » que $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 5$, puis que $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$.

Exercice 14 - Un point fixe

Soit $f: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [0; 1]$ tel que $f(c) = c$. Le résultat reste-t-il vrai pour $f: [0; 1[\rightarrow [0; 1[$?

Exercice 15 - Synthèse : équation fonctionnelle

Soit f continue sur $[0; 1]$ avec $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $c \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ tel que $f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right)$.