

Plaquette 2 - Limites de fonctions :
existence, calcul, changement de variable
Limites et continuité — Licence 1 (L1)
Exercices

Méthode

Pour **calculer** une limite, on se ramène à une limite de référence : par un **changement de variable** ($t = \frac{1}{x}$, $t = x - a$), en faisant apparaître un taux d'accroissement, ou en passant à l'exponentielle. Pour **prouver** une limite sans la calculer, on **encadre** (gendarmes) ou on **domine**. Pour montrer qu'une limite **n'existe pas**, on compare les limites à gauche et à droite, ou on trouve deux suites $x_n \rightarrow a$ et $y_n \rightarrow a$ telles que $f(x_n)$ et $f(y_n)$ aient des limites différentes (caractérisation séquentielle).

Exercice 1 - À gauche et à droite

Étudier les limites en 0 de $f(x) = \frac{|x|}{x}$ et en 1 de la partie entière $E(x)$.

Exercice 2 - Un produit qui s'écrase

Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

Exercice 3 - Une fonction sans limite

Montrer que $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.

Exercice 4 - Fractions rationnelles à l'infini

Déterminer les limites en $+\infty$ de $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - x}$ et $g(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + 3}$.

Exercice 5 - Changer de variable

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{1/x} - 1)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2}$.

Exercice 6 - La limite qui définit e

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$.

Exercice 7 - La forme 0 puissance 0

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}}$.

Exercice 8 - Deux taux usuels

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin(3x)}$.

Exercice 9 - Reconnaître une dérivée

Reconnaître un nombre dérivé dans chacune des expressions $\frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$ (quand $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$) et $\frac{\ln x}{x - 1}$ (quand $x \rightarrow 1$), et en déduire leurs limites.

Exercice 10 - Des perturbations bornées

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \cos x}{x - \sin x}$.

Exercice 11 - Le cosinus à l'infini

Montrer que $\cos$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice 12 - Une limite à paramètre

Pour quelles valeurs du réel a la fonction $f(x) = \frac{x^2 + ax - 6}{x - 2}$ a-t-elle une limite finie en 2 ? Calculer alors cette limite.

Exercice 13 - Encadrer une partie entière

À l'aide de l'encadrement $t - 1 < E(t) \leq t$, encadrer $\frac{E(x)}{x}$ pour $x > 0$, puis $x E\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x > 0$. Quelles limites obtient-on, en $+\infty$ pour la première et en 0^+ pour la seconde ?

Exercice 14 - Vrai ou faux ?

- a) Si $f(x) \rightarrow \ell$ quand $x \rightarrow a$, alors $|f(x)| \rightarrow |\ell|$.
- b) Si $f(1/n) \rightarrow 0$, alors $f(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$.
- c) Si f est bornée et $g(x) \rightarrow 0$, alors $f(x)g(x) \rightarrow 0$.
- d) Si $f(x) \rightarrow 0$ et $g(x) \rightarrow +\infty$, alors $f(x)g(x)$ a une limite.

Exercice 15 - Synthèse : deux limites en 0

Déterminer :

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$;
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)$.