

Plaquette 4 - Valeurs intermédiaires et bornes atteintes : applications

Limites et continuité — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Le **théorème des valeurs intermédiaires** (TVI) sert à prouver l'**existence** d'une solution de $f(x) = k$: on vérifie la continuité sur un intervalle et on trouve deux points où $f - k$ change de signe. La **stricte monotonie** donne l'**unicité**, et la **dichotomie** localise la solution. Le **théorème des bornes atteintes** affirme qu'une fonction continue sur un **segment** $[a; b]$ est bornée et atteint ses bornes. Dans les problèmes, l'astuce est souvent de choisir la bonne fonction auxiliaire, par exemple $g(x) = f(x) - x$ ou $g(x) = f(x + h) - f(x)$.

Exercice 1 - Degré impair

Montrer que tout polynôme réel de degré impair a au moins une racine réelle.
Application : $P(x) = x^3 - 4x^2 + 7$.

Exercice 2 - Localiser par dichotomie

Montrer que $x^5 + x - 1 = 0$ a une unique solution réelle α , qu'elle est dans $[0; 1]$, et la localiser à 0,1 près.

Exercice 3 - Une équation transcendante

Montrer que l'équation $e^x = 2 - x$ a une unique solution réelle, et donner un intervalle de longueur 0,1 qui la contient.

Exercice 4 - Trois racines

Montrer que $P(x) = x^3 - 3x + 1$ a exactement trois racines réelles, et donner un intervalle pour chacune.

Exercice 5 - Signe constant

Soit f continue sur un intervalle I et qui ne s'annule pas. Montrer que f garde un signe constant sur I . Est-ce vrai si I n'est pas un intervalle ?

Exercice 6 - Image d'un intervalle

Déterminer l'image de $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

Exercice 7 - Bornes atteintes sur un segment

Soit $f(x) = xe^{-x}$ sur $[0; 3]$. Justifier que f admet un maximum et un minimum, et les calculer.

Exercice 8 - Pourquoi un segment ?

Donner une fonction continue sur $]0 ; 1]$ non bornée, puis une fonction continue et bornée sur $]0 ; 1[$ qui n'atteint pas ses bornes. Qu'est-ce qui échoue dans chaque cas ?

Exercice 9 - Minimum sur $\mathbb{R}$

Soit f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) \rightarrow +\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 - La corde universelle

Soit f continue sur $[0 ; 1]$ avec $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $c \in \left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ tel que $f\left(c + \frac{1}{2}\right) = f(c)$.

Exercice 11 - Le randonneur

Un randonneur monte au sommet entre 8 h et 12 h, y dort, puis redescend par le même chemin le lendemain entre 8 h et 12 h. Montrer qu'il existe une heure à laquelle il est au même endroit les deux jours.

Exercice 12 - Nombre d'étapes de dichotomie

On cherche par dichotomie une solution de $f(x) = 0$ dans $[0 ; 1]$. Combien d'étapes faut-il pour la localiser à 10^{-3} près ? à 10^{-6} près ?

Exercice 13 - Deux fonctions qui se croisent

Soient f et g continues sur $[a ; b]$ avec $f(a) \leq g(a)$ et $f(b) \geq g(b)$. Montrer que les courbes de f et g se coupent. Application : $\cos x = x$ sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 14 - Vrai ou faux ?

- a) Si f est continue sur $[a ; b]$ et $f(a)f(b) < 0$, f s'annule exactement une fois.
- b) Une fonction continue sur $[0 ; 1]$ est bornée.
- c) Si f vérifie la conclusion du TVI sur tout intervalle, elle est continue.
- d) L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Exercice 15 - Synthèse : la réciproque de $x^3 + x$

Soit $f(x) = x^3 + x$ sur $\mathbb{R}$.

- a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
- b) On note $g = f^{-1}$. Calculer $g(0)$, $g(2)$ et $g(10)$.
- c) Justifier que g est continue et déterminer $\lim_{y \rightarrow +\infty} g(y)$.