

Fiche de révision — Limites et continuité

Licence 1 (L1) — définitions, théorèmes et méthodes

1. Limite en un point

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, \quad |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Pour une limite épointée : $0 < |x - a| < \eta$.

7. Prolongement par continuité

Si f n'est pas définie en a maisLa limite, si elle existe, est **unique**.**Limites latérales :**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell.$$

2. À l'infini / limite infinie

$$f(x) \rightarrow \ell \ (x \rightarrow +\infty) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists A, \\ x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

$$f(x) \rightarrow +\infty \ (x \rightarrow a) \iff \forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \\ 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow f(x) > M.$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{R},$$

3. Caractérisation séquentielle

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$

ssi pour toute suite $x_n \rightarrow a$ du domaine,

$$f(x_n) \rightarrow \ell.$$

Pour prouver la non-existence : trouver deux suites $x_n, y_n \rightarrow a$ donnant deux limites d'images différentes.

4. Opérations et gendarmes

Si $f \rightarrow \ell, g \rightarrow m$:

$$f + g \rightarrow \ell + m, \quad fg \rightarrow \ell m,$$

et si $m \neq 0$,

$$\frac{f}{g} \rightarrow \frac{\ell}{m}.$$

Formes indéterminées :

$$\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Il faut transformer l'expression.

on pose

Gendarmes :

$$g \leq f \leq h, \quad g \rightarrow \ell, \ h \rightarrow \ell \Rightarrow \boxed{f \rightarrow \ell}.$$

5. Composition

Si $f(x) \rightarrow b$ et $g(y) \rightarrow \ell$ quand $y \rightarrow b$, alors sous les hypothèses de définition usuelles

$$\boxed{g(f(x)) \rightarrow \ell}.$$

$$\tilde{f}(a) = \ell$$

En particulier, si g est continue en b :

$$f(x) \rightarrow b \Rightarrow g(f(x)) \rightarrow g(b).$$

6. Continuité en un point

$$f \text{ continue en } a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Critère séquentiel :

$$x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a).$$

Somme, produit et composition conservent la continuité ; quotient si le dénominateur est non nul.

pour obtenir un prolongement continu.

8. Théorème des valeurs intermédiaires

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte.

En particulier,

$$f(a)f(b) \leq 0 \Rightarrow \exists c \in [a, b], f(c) = 0.$$

Attention : le TVI donne l'existence, pas l'unicité.

9. Bornes atteintes

Si f est continue sur le segment $[a, b]$, alors elle est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists x_m, x_M \in [a, b], \quad f(x_m) = \min f, \quad f(x_M) = \max f.$$

Donc

$$f([a, b]) = [m, M].$$

Le TVI remplit toutes les valeurs entre le minimum et le maximum.

Piège majeur : le résultat est faux sur un intervalle ouvert ou non borné. Exemple : $f(x) = x$ sur $]0, 1[$ n'atteint ni 0 ni 1.

10. Théorème de la bijection

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors

$$f : I \rightarrow f(I) \text{ est bijective.}$$

Sa réciproque $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ est continue et strictement monotone.

Pour $f(x) = y$:

1. continuité ;
2. stricte monotonie ;
3. calcul de $f(I)$;
4. existence + unicité pour tout $y \in f(I)$.

11. Continuité uniforme

f est uniformément continue sur D si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in D, \\ |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Le même η fonctionne pour tous x, y .

Heine : continue sur $[a, b] \Rightarrow$ uniformément continue sur $[a, b]$.

12. Réflexes d'examen

- Limite : simplifier, factoriser, rationaliser, comparer.
- Non-existence : deux suites donnant deux comportements.
- Zéro : continuité + changement de signe $\Rightarrow$ TVI.
- Unicité : ajouter stricte monotonie.
- Maximum/minimum : vérifier **segment fermé borné** + continuité.
- Bijection : continuité + stricte monotonie + image.

13. Pièges classiques

- $\lim f = f(a)$ seulement si f est continue en a .
- Tester une seule suite ne suffit pas à prouver une limite.
- TVI $\nRightarrow$ unicité.
- Continue $\nRightarrow$ bornée sur un domaine quelconque.
- Une limite infinie n'est pas une valeur réelle de la fonction.

Méthodes et exemples essentiels

14. Preuve ε - η : modèle

Pour $f(x) = x^2$ en $a = 2$:

$$|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2|.$$

Si $|x - 2| < 1$, alors $|x + 2| < 5$. Donc

$$|x^2 - 4| < 5|x - 2|.$$

Choisir

$$\eta = \min \left(1, \frac{\varepsilon}{5} \right).$$

Alors $|x - 2| < \eta \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon$.

15. Non-existence par suites

Pour $f(x) = \sin(1/x)$:

$$x_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}, \quad y_n = \frac{1}{3\pi/2 + 2n\pi}.$$

Alors $x_n, y_n \rightarrow 0$, mais

$$f(x_n) = 1, \quad f(y_n) = -1.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x) \text{ n'existe pas.}$$

16. Prolongement : modèle

Pour $x \neq 1$,

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1.$$

Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Le prolongement continu est obtenu en posant

$$f(1) = 2.$$

17. TVI + monotonie

Pour $g(x) = x^3 + x - 1$:

$$g(0) = -1 < 0, \quad g(1) = 1 > 0.$$

Continuité sur $[0, 1] \Rightarrow$ une racine $c \in (0, 1)$.

Pour $x < y$,

$$g(y) - g(x) = (y - x)(x^2 + xy + y^2 + 1) > 0.$$

Donc g est strictement croissante et la racine est **unique**.

18. Image d'un segment

Si $f \in \mathcal{C}([a, b])$:

$$m = \min_{[a, b]} f, \quad M = \max_{[a, b]} f.$$

Puis, par TVI,

$$f([a, b]) = [m, M].$$

Deux ingrédients :

- bornes **atteintes** ;
- toutes les valeurs intermédiaires **prises**.

19. Arbre de décision

On te demande « montrer qu'il existe... »

- une solution $f(x) = y$: TVI ;
- un max/min : bornes atteintes ;
- une unique solution : TVI + stricte monotonie ;
- une fonction inverse : continuité + stricte monotonie, puis déterminer $f(I)$.