

Limites et continuité

Licence 1 (L1) — Analyse réelle

Idée directrice. Au lycée, la limite et la continuité sont souvent guidées par le graphique. En L1, elles deviennent des propriétés quantifiées. On apprend à prouver qu'une fonction approche une valeur, à reconnaître les hypothèses exactes des grands théorèmes, puis à utiliser continuité et monotonie pour établir existence, bornes et bijectivité.

Objectifs. Savoir rédiger une preuve de limite à partir de la définition ; utiliser la caractérisation séquentielle ; calculer des limites par opérations, comparaison et composition ; distinguer continuité ponctuelle, continuité sur un intervalle et continuité uniforme ; traiter un prolongement par continuité ; appliquer correctement le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème des bornes atteintes et le théorème de la bijection.

1. Limite d'une fonction en un point

Soit $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, et soit a un point adhérent à D : on peut trouver des points de D arbitrairement proches de a .

Limite finie en un point

On dit que $f(x)$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x - a| < \eta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

Lorsque la valeur $f(a)$ n'intervient pas dans le problème, on peut imposer $0 < |x - a| < \eta$. Cette version est naturelle pour les limites d'une fonction non définie en a .

Démontrer une limite avec la définition

Pour établir $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$:

1. partir de $|f(x) - \ell|$;
2. le majorer en fonction de $|x - a|$;
3. choisir η afin que $|x - a| < \eta$ entraîne $|f(x) - \ell| < \varepsilon$;
4. terminer en respectant l'ordre des quantificateurs : ε est donné, puis on choisit $\eta = \eta(\varepsilon)$.

Une preuve ε - η

Montrons que $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$. Pour $|x - 2| < 1$, on a $1 < x < 3$, donc $|x + 2| < 5$. Ainsi

$$|x^2 - 4| = |x - 2| |x + 2| < 5|x - 2|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. En choisissant

$$\eta = \min \left(1, \frac{\varepsilon}{5} \right),$$

on obtient $|x - 2| < \eta \implies |x^2 - 4| < \varepsilon$.

Unicité de la limite

Si une limite finie existe en un point, elle est unique.

La preuve est analogue à celle de l'unicité de la limite d'une suite : si deux limites distinctes existaient, deux petits voisinages disjoints devraient contenir simultanément $f(x)$ pour x suffisamment proche de a .

1.1. Limites à droite et à gauche

On note

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$$

les limites obtenues en restreignant respectivement à $x > a$ et $x < a$.

Critère par limites latérales

Si f est définie de part et d'autre de a , alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell, \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell. \end{cases}$$

Exemple

Pour $f(x) = |x|/x$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$

Les limites latérales étant différentes, f n'a pas de limite en 0.

2. Limites infinies et limites à l'infini

Limite infinie en un point

On écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in D, \quad 0 < |x - a| < \eta \implies f(x) > A.$$

Définition analogue pour $-\infty$.

Limite à $+\infty$

Si D n'est pas majoré, on écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D, \quad x > A \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On adapte naturellement la définition à $x \rightarrow -\infty$ et aux limites infinies.

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

3. Caractérisation séquentielle

Caractérisation séquentielle de la limite

Soit a adhérent à D . Alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$

si et seulement si, pour toute suite (x_n) de points de D telle que $x_n \rightarrow a$ (et $x_n \neq a$ si l'on étudie une limite épointée), on a

$$f(x_n) \rightarrow \ell.$$

Ce théorème fait le pont entre le chapitre sur les suites et celui sur les fonctions.

Prouver qu'une limite n'existe pas

Il suffit de construire deux suites (x_n) et (y_n) du domaine telles que

$$x_n \rightarrow a, \quad y_n \rightarrow a,$$

mais pour lesquelles $f(x_n)$ et $f(y_n)$ ont des limites différentes, ou bien l'une des deux images ne converge pas.

Oscillation

Pour $f(x) = \sin(1/x)$ sur $\mathbb{R}^*$, posons

$$x_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}, \quad y_n = \frac{1}{3\pi/2 + 2n\pi}.$$

Alors $x_n \rightarrow 0$, $y_n \rightarrow 0$, mais

$$f(x_n) = 1, \quad f(y_n) = -1.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$ n'existe pas.

Piège classique

Vérifier la limite le long d'une seule suite ne prouve rien en général : la caractérisation séquentielle exige que la propriété soit vraie pour **toute** suite tendant vers a .

4. Opérations, ordre et composition

Opérations sur les limites

Si $f(x) \rightarrow \ell$ et $g(x) \rightarrow m$ lorsque $x \rightarrow a$, alors

$$f + g \rightarrow \ell + m, \quad fg \rightarrow \ell m, \quad \lambda f \rightarrow \lambda \ell.$$

Si $m \neq 0$, alors $g(x) \neq 0$ pour x assez proche de a et

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{\ell}{m}.$$

Les formes

$$\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}$$

sont **indéterminées** : elles imposent une transformation algébrique, une comparaison ou un équivalent adapté lorsqu'il est disponible dans le cours.

Passage à la limite dans les inégalités

Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a et si $f(x) \rightarrow \ell$, $g(x) \rightarrow m$, alors $\ell \leq m$.

Gendarmes

Si, au voisinage de a ,

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

et si $g(x) \rightarrow \ell$ et $h(x) \rightarrow \ell$, alors $f(x) \rightarrow \ell$.

Exemple

Pour tout $x \neq 0$,

$$-|x| \leq x \sin(1/x) \leq |x|.$$

Comme les deux fonctions extrêmes tendent vers 0 lorsque $x \rightarrow 0$, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0.$$

Composition des limites

Si $f(x) \rightarrow b$ lorsque $x \rightarrow a$ et si $g(y) \rightarrow \ell$ lorsque $y \rightarrow b$, sous les hypothèses usuelles garantissant que $g(f(x))$ est défini au voisinage considéré, alors

$$g(f(x)) \rightarrow \ell.$$

En particulier, si g est continue en b , alors $f(x) \rightarrow b$ entraîne $g(f(x)) \rightarrow g(b)$.

5. Continuité en un point**Continuité en un point**

Soit $a \in D$. La fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est **continue en a** si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, \quad |x - a| < \eta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Critère séquentiel de continuité

f est continue en a si et seulement si, pour toute suite (x_n) de points de D telle que $x_n \rightarrow a$,

$$f(x_n) \rightarrow f(a).$$

Stabilité de la continuité

Les fonctions constantes et l'identité sont continues. Somme, produit et composition de fonctions continues sont continues ; un quotient f/g est continu là où $g \neq 0$.

On en déduit la continuité des polynômes sur $\mathbb{R}$, des fonctions rationnelles sur leur domaine, puis des fonctions usuelles dès que leurs propriétés de continuité ont été établies.

Piège classique

La valeur $f(a)$ n'a aucune influence sur la limite **épointée** de f en a , mais elle est décisive pour la continuité : il faut exactement $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

6. Prolongement par continuité**Prolongement par continuité**

Supposons f définie sur $D \setminus \{a\}$ et

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}.$$

La fonction

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a, \\ \ell, & x = a, \end{cases}$$

est continue en a . On dit que $\tilde{f}$ est le **prolongement par continuité** de f en a .

Exemple

Pour $x \neq 1$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$. En posant $\tilde{f}(1) = 2$, on obtient une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

7. Continuité sur un intervalle et sur un segment

Une fonction est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point intérieur de I , avec les limites unilatérales appropriées aux extrémités lorsque celles-ci appartiennent à I .

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Pour toute valeur y comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = y.$$

Autrement dit, une fonction continue envoie un intervalle sur un intervalle.

Corollaire : existence d'un zéro

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et

$$f(a)f(b) \leq 0,$$

alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$. Si $f(a)f(b) < 0$, on peut choisir $c \in (a, b)$.

Montrer l'existence d'une solution de $f(x) = 0$

1. choisir un segment $[a, b]$;
2. justifier que f est continue sur ce segment ;
3. calculer $f(a)$ et $f(b)$;
4. vérifier un changement de signe ;
5. conclure par le TVI à l'existence d'au moins une solution.

Pour l'**unicité**, il faut une information supplémentaire, typiquement la stricte monotonie.

Exemple

La fonction $f(x) = x^3 + x - 1$ est continue sur $[0, 1]$ et

$$f(0) = -1 < 0, \quad f(1) = 1 > 0.$$

Le TVI fournit une racine $c \in (0, 1)$. De plus, si $x < y$,

$$f(y) - f(x) = (y - x)(x^2 + xy + y^2 + 1) > 0,$$

donc f est strictement croissante : cette racine est unique.

8. Image d'un segment et bornes atteintes**Théorème des bornes atteintes**

Toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes : il existe $x_m, x_M \in [a, b]$ tels que

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M).$$

Ainsi

$$f(x_m) = \min_{[a,b]} f, \quad f(x_M) = \max_{[a,b]} f.$$

Ce résultat exprime une propriété fondamentale de compacité du segment. Il est plus fort que « f est bornée » : les extrema sont effectivement **atteints**.

Image continue d'un segment

Si f est continue sur $[a, b]$, alors il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que

$$f([a, b]) = [m, M].$$

Plus précisément,

$$m = \min_{[a,b]} f, \quad M = \max_{[a,b]} f.$$

Justification. Le théorème des bornes atteintes donne m et M . Le TVI assure ensuite que toutes les valeurs entre m et M sont prises.

Hypothèse « segment » indispensable

Le théorème des bornes atteintes est faux sur un intervalle ouvert ou non borné. Par exemple :

- $f(x) = x$ sur $]0, 1[$ est continue et bornée, mais n'atteint ni 0 ni 1 ;
- $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$ est continue mais n'est pas bornée.

9. Théorème de la bijection

Théorème de la bijection

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement monotone. Alors :

- $f(I)$ est un intervalle ;
- $f : I \rightarrow f(I)$ est bijective ;
- l'application réciproque $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ est continue et strictement monotone, dans le même sens que f si f est croissante, dans le même sens décroissant si f est décroissante.

Résoudre $f(x) = y$ par continuité et monotonie

Sur un intervalle I :

1. établir la continuité de f ;
2. établir sa stricte monotonie ;
3. déterminer $f(I)$ à l'aide des valeurs aux bornes ou des limites aux extrémités ;
4. conclure que pour tout $y \in f(I)$, l'équation $f(x) = y$ possède une unique solution dans I .

Exemple

La fonction $f(x) = x^3 + x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Ainsi $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et f définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Son inverse est continue et strictement croissante.

10. Continuité uniforme

Continuité uniforme

Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est **uniformément continue** sur D si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in D, \quad |x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.}$$

La différence essentielle avec la continuité ponctuelle est que le même η fonctionne pour **tous** les points x, y du domaine.

Heine

Toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ est uniformément continue sur $[a, b]$.

Continuité mais pas uniformité sur un domaine non borné

$f(x) = x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'y est pas uniformément continue. Posons

$$x_n = n, \quad y_n = n + \frac{1}{n}.$$

Alors $|x_n - y_n| = 1/n \rightarrow 0$, mais

$$|f(y_n) - f(x_n)| = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \not\rightarrow 0.$$

11. Méthodes et erreurs classiques

Choisir le bon outil

- **Calculer une limite** : simplifier, factoriser, rationaliser, comparer, utiliser les opérations et la composition.
- **Prouver une limite rigoureusement** : revenir à ε - η si nécessaire.
- **Montrer qu'une limite n'existe pas** : utiliser deux suites approchant le même point.
- **Prouver l'existence d'une solution** : continuité + TVI.
- **Prouver l'unicité** : ajouter en général la stricte monotonie.
- **Prouver qu'un maximum/minimum existe** : vérifier que le domaine est un segment et la fonction continue.

Confusions à éviter

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ n'est vrai que si f est continue en a .
- Le TVI prouve une **existence**, pas une unicité.
- Une fonction continue n'est pas forcément bornée : il faut notamment un domaine compact tel qu'un segment pour appliquer le théorème des bornes atteintes.
- « f est continue et injective » ne suffit pas toujours à déterminer son image : il faut étudier le domaine et ses extrémités.
- Une limite infinie n'est pas un nombre réel : écrire $f(a) = +\infty$ pour une fonction réelle est incorrect.

12. Exercices corrigés essentiels

Exercice 1 — limite et prolongement

Étudier en 0 la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \quad (x \neq 0).$$

On rationalise :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1}.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}.$$

Le prolongement par continuité est obtenu en posant $f(0) = 1/2$.

Exercice 2 — TVI et unicité

Montrer que $x^3 + x = 1$ possède une unique solution réelle.

Posons $g(x) = x^3 + x - 1$. La fonction g est continue sur $[0, 1]$, avec $g(0) = -1$ et $g(1) = 1$. Le TVI assure l'existence d'une racine $c \in (0, 1)$. Pour $x < y$,

$$g(y) - g(x) = (y - x)(x^2 + xy + y^2 + 1) > 0,$$

donc g est strictement croissante : la racine est unique.

Exercice 3 — pourquoi le segment compte

Sur $I =]0, 1[$, la fonction $f(x) = 1/x$ est continue mais non bornée. En effet, $f(1/n) = n \rightarrow +\infty$. Cela montre qu'on ne peut pas remplacer « segment $[a, b]$ » par « intervalle quelconque » dans le théorème des bornes atteintes.

À retenir. Les trois réflexes structurants du chapitre sont :

$\boxed{\text{limite} \iff \text{contrôle local}},$

$\boxed{\text{continuité} + \text{intervalle} \implies \text{valeurs intermédiaires}},$

$\boxed{\text{continuité} + \text{segment} \implies \text{bornes atteintes}}.$

La stricte monotonie transforme ensuite une existence en unicité et conduit au théorème de la bijection.