

Plaque 1 - Connecteurs, quantificateurs et modes de démonstration

Logique et raisonnement — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Connecteurs logiques.

- **Négation** : $\text{non}(P \text{ et } Q) = \text{non}P \text{ ou } \text{non}Q$ (lois de **De Morgan**).
- **Implication** : $P \Rightarrow Q$ équivaut à $\text{non}P \text{ ou } Q$. Sa **négation** est « P et $\text{non}Q$ ».
- **Contraposée** : $P \Rightarrow Q$ équivaut à $\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$ — **même valeur de vérité**.
- **Réciproque** : $Q \Rightarrow P$, qui n'a **aucun lien logique** avec $P \Rightarrow Q$.
- **Équivalence** : $P \Leftrightarrow Q$, à démontrer par **double implication**.

Quantificateurs.

$$\text{non}(\forall x, P(x)) = \exists x, \text{non}P(x)$$

$$\text{non}(\exists x, P(x)) = \forall x, \text{non}P(x)$$

- **L'ordre compte** : « $\forall x, \exists y$ » et « $\exists y, \forall x$ » sont des énoncés **différents** (dans le second, y ne dépend pas de x).
- $\exists!$ signifie « il existe un **unique** » : à démontrer en deux temps, existence puis unicité.

Modes de démonstration.

- **Direct** : on part des hypothèses et on déduit.
- **Contraposée** : utile quand la conclusion est plus facile à nier que l'hypothèse.
- **Absurde** : on suppose P et $\text{non}Q$, et on aboutit à une contradiction.
- **Contre-exemple** : un seul suffit à réfuter un « $\forall$ ».
- **Disjonction de cas** : on partitionne les possibilités.
- **Récurrence** : initialisation, puis hérédité $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Variantes : **forte** (on suppose $P(k)$ pour tout $k \leq n$) et **double** (on suppose $P(n)$ et $P(n+1)$).

Correction de l'exercice 1 - Négation d'un énoncé quantifié

On **inverse chaque quantificateur** dans l'ordre, puis on nie la propriété finale.

- $\forall$ devient $\exists$, $\exists$ devient $\forall$, et $>$ devient $\leq$:

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$$

- **Valeur de vérité de l'énoncé initial** : **vrai**, car pour x donné il suffit de prendre $y = 1 - x$, et alors $x + y = 1 > 0$.
- **Valeur de vérité de la négation** : **fausse** — aucun réel x ne rend $x + y \leq 0$ pour **tout** y (prendre y très grand).
- **Règle mécanique** : on descend dans la formule de gauche à droite, en échangeant chaque quantificateur, et l'on nie la relation terminale.

Réponse. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$.

Correction de l'exercice 2 - Ordre des quantificateurs

- **(A) est vraie** : pour chaque x , on choisit $y = x + 1$. Le y **dépend de** x , c'est permis.

- **(B) est fausse** : elle affirme l'existence d'un réel y **strictement supérieur à tous les réels**. Or y lui-même contredit l'énoncé (avec $x = y$, on aurait $y > y$).
- **Différence essentielle** : dans (B), le y est choisi **avant** de connaître x — il doit convenir uniformément.
- **Retenir** : $\exists \forall$ implique $\forall \exists$, mais la réciproque est fausse. Échanger deux quantificateurs de nature différente change le sens de l'énoncé.
- **Analogie** : « tout étudiant a un professeur » n'est pas « il existe un professeur commun à tous les étudiants ».

Réponse. (A) vraie, (B) fausse : l'ordre des quantificateurs est essentiel.

Correction de l'exercice 3 - Implication et table de vérité

On examine les quatre cas possibles (V : vrai, F : faux).

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\text{non}P$	$(\text{non}P) \text{ ou } Q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

- Les colonnes 3 et 5 coïncident : les deux propositions sont **équivalentes**.
- Négation, par la loi de De Morgan :

$$\text{non}(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \text{ et } \text{non}Q$$
- **À retenir** : une implication n'est fausse que dans un seul cas, hypothèse vraie et conclusion fausse. En particulier, « faux $\Rightarrow$ n'importe quoi » est vrai.

Réponse. Mêmes colonnes ; $\text{non}(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \text{ et } \text{non}Q$.

Correction de l'exercice 4 - Réciproque ou contraposée ?

- a) **Réciproque** : « pour tout réel x , si $x^2 > 4$ alors $x > 2$ ». **Contraposée** : « pour tout réel x , si $x^2 \leq 4$ alors $x \leq 2$ ».
- b) (I) est **vraie** : si $x > 2 > 0$, on multiplie l'inégalité par des positifs, $x^2 > 2x > 4$.
- La contraposée a toujours **la même valeur de vérité** que l'implication : elle est **vraie**.

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P)$$

- La réciproque est **fausse** : contre-exemple $x = -3$, pour lequel $x^2 = 9 > 4$ mais $x \leq 2$.
- Une implication vraie peut avoir une réciproque fausse : il ne faut jamais « retourner » une implication sans preuve.

Réponse. Réciproque fausse ($x = -3$) ; contraposée vraie, comme (I).

Correction de l'exercice 5 - Condition nécessaire, condition suffisante

Rappel : « P est une condition suffisante pour Q » signifie $P \Rightarrow Q$; « P est une condition nécessaire pour Q » signifie $Q \Rightarrow P$.

$$P \text{ suffisante pour } Q \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \quad P \text{ nécessaire pour } Q \Leftrightarrow (Q \Rightarrow P)$$

- a) Multiple de 4 $\Rightarrow$ pair, mais pas l'inverse ($n = 2$) : condition **suffisante**, non nécessaire.
- b) Multiple de 6 $\Rightarrow$ pair, mais pas l'inverse ($n = 4$) : condition **nécessaire**, non suffisante.

c) n pair $\Rightarrow n^2$ pair, et la réciproque se démontre par contraposée (exercice suivant) : condition **nécessaire et suffisante**.

Réponse. a) suffisante · b) nécessaire · c) nécessaire et suffisante.

Correction de l'exercice 6 – Contraposée

Démonstration par contraposée : on montre que si n est **impair**, alors n^2 est impair.

— Si n est impair, $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$.

— Alors

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

— C'est un entier **impair**.

— La contraposée étant démontrée, l'implication initiale est vraie.

— **Pourquoi la contraposée ?** Partir de « n^2 pair » n'apporte aucune écriture exploitable de n , alors que « n impair » se traduit immédiatement.

— **Application célèbre** : ce lemme est la clé de la preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Réponse. Contraposée : n impair $\Rightarrow n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ impair.

Correction de l'exercice 7 – Raisonnement par l'absurde

Par l'absurde. Supposons $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers, $q \neq 0$, et la fraction **irréductible**.

— En élevant au carré : $p^2 = 2q^2$, donc p^2 est **pair**.

— D'après l'exercice précédent, p est **pair** : $p = 2k$.

— En substituant : $4k^2 = 2q^2$, donc $q^2 = 2k^2$ et q^2 est pair, donc q est **pair**.

— p et q sont tous deux pairs : la fraction n'était **pas irréductible. Contradiction**.

— **Conclusion** : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

— **Valeur approchée** : $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$ — son développement décimal est infini non périodique, ce qui est une autre façon de voir l'irrationalité.

— **Généralisation** : $\sqrt{n}$ est irrationnel dès que n n'est pas un carré parfait.

Réponse. Absurde : p et q seraient tous deux pairs, contredisant l'irréductibilité.

Correction de l'exercice 8 – Contre-exemple

— **Premiers essais** : $n = 0$ donne 41 (premier) ; $n = 1$ donne 43 ; $n = 2$ donne 47 ; $n = 10$ donne 151 — tous premiers.

— La propriété tient en fait pour $n = 0, \dots, 39$!

— **Contre-exemple** : pour $n = 40$,

$$40^2 + 40 + 41 = 1600 + 81 = 1681 = 41^2$$

— 1681 n'est **pas premier** : l'énoncé est **faux**.

— **Preuve directe de l'échec** : pour $n = 41$, chaque terme est multiple de 41 ($41^2 + 41 + 41 = 41 \times 43$).

— **Leçon méthodologique** : un grand nombre de vérifications ne **démontre rien**. Un seul contre-exemple suffit à réfuter un énoncé universel.

— **Contexte historique** : ce polynôme d'Euler illustre la difficulté de produire des formules engendrant des nombres premiers.

Réponse. Faux : $n = 40$ donne $1681 = 41^2$.

Correction de l'exercice 9 - Récurrence simple

Initialisation ($n = 1$) : le membre de gauche vaut 1, celui de droite $\frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1 \checkmark$

Hérédité. Supposons la formule vraie au rang n .

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1) \left[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1) \right]$$

- On met au même dénominateur : $\frac{2n^2 + n + 6n + 6}{6} = \frac{2n^2 + 7n + 6}{6}$.
- **Factorisation** : $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$ (racines -2 et $-\frac{3}{2}$).
- On obtient donc $\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$, qui est bien la formule au rang $n+1 \checkmark$
- **Contrôle numérique** ($n = 4$) : $1 + 4 + 9 + 16 = 30$, et $\frac{4 \times 5 \times 9}{6} = 30 \checkmark$
- **Point de rédaction** : toujours énoncer clairement l'hypothèse de récurrence et la conclusion visée.

Réponse. Récurrence ; factorisation $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$.

Correction de l'exercice 10 - Récurrence forte

Récurrence double (on a besoin des **deux** rangs précédents).

- **Initialisation** : $u_0 = 1 \leq 2^0 = 1 \checkmark$ et $u_1 = 2 \leq 2^1 = 2 \checkmark$
- **Hérédité** : supposons $u_n \leq 2^n$ et $u_{n+1} \leq 2^{n+1}$. Alors

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \leq 2^{n+1} + 2^n = 3 \times 2^n \leq 4 \times 2^n = 2^{n+2}$$
- La propriété est héréditaire, donc vraie pour tout n .
- **Contrôle** : $u_2 = 3 \leq 4$; $u_3 = 5 \leq 8$; $u_4 = 8 \leq 16$; $u_5 = 13 \leq 32 \checkmark$
- **Pourquoi une récurrence double ?** La relation fait intervenir deux termes antérieurs ; une initialisation sur **deux** rangs est indispensable.
- **Finesse** : la majoration réelle est en φ^n avec $\varphi \approx 1,618$ — la borne 2^n est correcte mais large.

Réponse. Récurrence double : $2^{n+1} + 2^n = 3 \cdot 2^n \leq 2^{n+2}$.

Correction de l'exercice 11 - Disjonction de cas

Disjonction selon la parité de n .

- **Cas 1 : n pair**, $n = 2k$. Alors $n(n+1) = 2k(2k+1)$, multiple de 2 $\checkmark$
- **Cas 2 : n impair**, $n = 2k+1$. Alors $n+1 = 2k+2 = 2(k+1)$, et $n(n+1) = 2(k+1)(2k+1)$, multiple de 2 $\checkmark$
- Les deux cas **couvrent** tous les entiers : la propriété est démontrée.
- **Vision plus générale** : parmi deux entiers **consécutifs**, l'un est nécessairement pair. De même, parmi k entiers consécutifs, l'un est multiple de k — donc $n(n+1)(n+2)$ est toujours multiple de 6.
- **Application** : $\frac{n(n+1)}{2}$ est toujours un **entier**, ce qui légitime la formule de la somme des n premiers entiers.

Réponse. Deux cas selon la parité de n ; l'un des deux facteurs est pair.

Correction de l'exercice 12 - Équivalence

Sens $\Leftarrow$ (le plus facile) : si $x = y = 0$, alors $x^2 + y^2 = 0$ ✓

Sens $\Rightarrow$: supposons $x^2 + y^2 = 0$.

- Comme $x^2 \geq 0$ et $y^2 \geq 0$, on a $x^2 = -y^2 \leq 0$, donc $x^2 \leq 0$.
- Combiné à $x^2 \geq 0$, cela donne $x^2 = 0$, donc $x = 0$; de même $y = 0$.
- **Conclusion** : l'équivalence est établie.
- **Principe général** : une **somme de carrés** de réels est nulle si et seulement si **chaque** terme est nul. C'est l'argument le plus employé pour résoudre les systèmes issus d'une mise sous forme canonique.
- **Attention** : ce raisonnement est **faux dans** $\mathbb{C}$ — par exemple $1^2 + i^2 = 0$ sans que 1 ni i soient nuls.

Réponse. Somme de carrés nulle $\Rightarrow$ chaque carré nul (valable dans $\mathbb{R}$).

Correction de l'exercice 13 - Existence et unicité

Soit $f(x) = x^3 + x - 1$, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Existence. $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$.

- Par le **théorème des valeurs intermédiaires**, il existe $\alpha \in]0 ; 1[$ avec $f(\alpha) = 0$.

Unicité. $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ pour tout x .

- f est donc **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$: elle s'annule **au plus une fois**.
- **Conclusion** : il existe un **unique** réel solution.
- **Valeur approchée** : par dichotomie, $f(0,68) \approx -0,0056$ et $f(0,69) \approx 0,0186$, donc $\alpha \approx 0,6823$.
- **Structure de la rédaction** : existence (TVI) **puis** unicité (stricte monotonie) — c'est le schéma type des questions « $\exists!$ ».

Réponse. TVI pour l'existence, stricte croissance pour l'unicité ; $\alpha \approx 0,682$.

Correction de l'exercice 14 - Négation d'une définition

- **Définition de la convergence** :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

- **Négation** : on échange tous les quantificateurs et l'on nie l'inégalité,

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - \ell| > \varepsilon$$

- **Traduction** : il existe un seuil ε que la suite dépasse **une infinité de fois** (aussi loin qu'on aille).
- **Exemple d'utilisation** : pour $u_n = (-1)^n$ et $\ell = 1$, on prend $\varepsilon = 1$; pour tout N , il existe un indice **impair** $n \geq N$ avec $|u_n - 1| = 2 > 1$ ✓
- **Point clé** : « $\exists n \geq N$ » et non « $\forall n \geq N$ » — la suite n'a pas besoin de rester loin de ℓ , il suffit qu'elle y revienne.

Réponse. $\exists \varepsilon > 0, \forall N, \exists n \geq N, |u_n - \ell| > \varepsilon$.

Correction de l'exercice 15 - Récurrence et inégalité

Initialisation ($n = 4$) : $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$ — l'inégalité (large) est vérifiée ✓

Hérédité. Supposons $2^n \geq n^2$ pour un $n \geq 4$.

- $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2n^2$.

- Il suffit donc de montrer $2n^2 \geq (n+1)^2$, soit $2n^2 \geq n^2 + 2n + 1$, c'est-à-dire
$$n^2 - 2n - 1 \geq 0$$
- Le trinôme a pour racines $1 \pm \sqrt{2}$, donc il est positif pour $n \geq 1 + \sqrt{2} \approx 2,41$ — vrai puisque $n \geq 4$ ✓
- **Conclusion** : l'inégalité vaut pour tout $n \geq 4$.
- **Contrôle** : $n = 5$ donne $32 \geq 25$ ✓ ; $n = 10$ donne $1024 \geq 100$ ✓
- **Pourquoi $n \geq 4$?** Pour $n = 3$, $2^3 = 8 < 9$ — l'inégalité est **fausse**, d'où le choix du rang initial.

Réponse. Récurrence à partir de $n = 4$; il suffit de $n^2 - 2n - 1 \geq 0$.