

Plaquette 3 – Quantificateurs : traduire, nier, décider

Logique et raisonnement — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Quantificateurs.

$$\text{non}(\forall x \in E, P(x)) \Leftrightarrow \exists x \in E, \text{non}P(x) \quad \text{non}(\exists x \in E, P(x)) \Leftrightarrow \forall x \in E, \text{non}P(x)$$

— L'ordre compte : $\exists y \forall x$ entraîne $\forall x \exists y$, pas l'inverse.

— $\forall$ se distribue sur « et », $\exists$ sur « ou » :

$$\forall x, (P(x) \text{ et } Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x, P(x)) \text{ et } (\forall x, Q(x))$$

— Mais $\forall x, (P(x) \text{ ou } Q(x))$ n'entraîne pas $(\forall x, P(x))$ ou $(\forall x, Q(x))$.

— Unicité : $\exists! x, P(x) \Leftrightarrow \exists x, (P(x) \text{ et } \forall y, (P(y) \Rightarrow y = x))$.

Correction de l'exercice 1 – Traduire des définitions

On écrit les objets dans l'ordre où on les choisit.

a) Il existe un majorant M valable pour tous les x :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$$

— b) $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.

— c) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y)$ (ou : $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c$).

— d) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.

— En a), M est choisi **avant** x : il ne dépend pas de x . C'est ce qui fait la différence avec « chaque valeur est finie ».

Réponse. a) $\exists M, \forall x, f(x) \leq M$ · b) $\exists x, f(x) = 0$ · c) $\forall x, \forall y, f(x) = f(y)$ · d) $\forall n, u_n \leq u_{n+1}$.

Correction de l'exercice 2 – Nier ces définitions

On échange les quantificateurs et on nie la propriété finale.

$$\text{non}(\exists M, \forall x, f(x) \leq M) \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) > M$$

a) « f n'est pas majorée » : elle dépasse n'importe quel nombre.

b) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$: « f ne s'annule jamais ».

c) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) \neq f(y)$: « f prend au moins deux valeurs différentes ».

d) $\exists n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1}$: « la suite décroît au moins une fois ». Attention : « non croissante » ne veut **pas** dire « décroissante ».

Réponse. a) $\forall M, \exists x, f(x) > M$ · b) $\forall x, f(x) \neq 0$ · c) $\exists x, \exists y, f(x) \neq f(y)$ · d) $\exists n, u_n > u_{n+1}$.

Correction de l'exercice 3 – Vrai ou faux ?

a) **Faux** : contre-exemple $x = \frac{1}{2}$, car $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$. En effet $x^2 - x = x(x - 1) < 0$ pour $0 < x < 1$.

b) **Vrai** : c'est la négation de a) ; l'exemple $x = \frac{1}{2}$ convient.

c) **Vrai** : pour n donné, $m = n + 1$ convient (m dépend de n).

d) **Faux** : sa négation $\forall m, \exists n, m < n$ est vraie ($n = m + 1$) ; $\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément.

$$\text{non}(\exists m, \forall n, m \geq n) \Leftrightarrow \forall m, \exists n, n > m$$

a) et b) sont la négation l'une de l'autre : exactement une des deux est vraie ; de même pour d) et la négation de d).

Réponse. a) faux · b) vrai · c) vrai · d) faux.

Correction de l'exercice 4 – Une racine carrée pour tous ?

- a) **Faux** : pour $x = -1$, aucun réel y ne vérifie $y^2 = -1$, puisque $y^2 \geq 0$.
- b) **Vrai** : pour $x \geq 0$, $y = \sqrt{x}$ convient.
- c) **Faux** : pour $x = 4$, $y = 2$ et $y = -2$ conviennent ; l'unicité échoue (sauf en $x = 0$).
- d) **Faux** : un même y devrait vérifier $y^2 = 0$ et $y^2 = 1$.

$$\forall x \geq 0, \exists ! y \in \mathbb{R}_+, y^2 = x \quad (\text{vrai : c'est la définition de } \sqrt{x})$$

— Le domaine des variables fait partie de l'énoncé : changer $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}_+$ change la valeur de vérité.

Réponse. a) faux · b) vrai · c) faux · d) faux.

Correction de l'exercice 5 – Injectivité

- a) $\forall x \in E, \forall x' \in E, (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$, ou, par contraposée :

$$\forall x \in E, \forall x' \in E, (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$$

- b) $\exists x \in E, \exists x' \in E, f(x) = f(x')$ et $x \neq x'$.
- c) Sur $\mathbb{R}$: non, car $f(1) = f(-1) = 1$ avec $1 \neq -1$ (exemple de la négation).
- Sur $\mathbb{R}_+$: oui. Si $x^2 = x'^2$ avec $x, x' \geq 0$, alors $(x - x')(x + x') = 0$; si $x + x' = 0$, alors $x = x' = 0$; sinon $x = x'$.

Réponse. Non injective sur $\mathbb{R}$ ($f(1) = f(-1)$), injective sur $\mathbb{R}_+$.

Correction de l'exercice 6 – Surjectivité

- a) Définition et négation :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y \qquad \exists y \in F, \forall x \in E, f(x) \neq y$$

- b) f n'est **pas** surjective : $y = -1$ n'a pas d'antécédent, car $x^2 \geq 0 > -1$ pour tout x .
- g est surjective : pour $y \geq 0$, $x = \sqrt{y}$ vérifie $g(x) = y$.
- La surjectivité dépend de l'**ensemble d'arrivée** : même formule, conclusions différentes.

Réponse. f non surjective (-1 sans antécédent) ; g surjective.

Correction de l'exercice 7 – Fonction périodique

- Définition : il existe une période strictement positive qui convient partout.

$$\exists T > 0, \forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$$

- Négation : $\forall T > 0, \exists x \in \mathbb{R}, f(x + T) \neq f(x)$.
- Pour $f(x) = x^2$: soit $T > 0$. On prend $x = 0$: $f(T) = T^2 > 0 = f(0)$, donc $f(0 + T) \neq f(0)$.
- La négation est démontrée pour tout $T > 0$: f n'est pas périodique.
- Remarque : on a choisi x **après** T , ce que permet l'ordre « $\forall T, \exists x$ ».

Réponse. $\exists T > 0, \forall x, f(x + T) = f(x)$; pour x^2 , $x = 0$ contredit toute période.

Correction de l'exercice 8 – Limite infinie

- a) On échange les trois quantificateurs et on nie l'inégalité :

$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall B \in \mathbb{R}, \exists x \geq B, f(x) < A$$

- b) Soit $A \in \mathbb{R}$. Si $A \leq 0$, tout $B \geq 0$ convient. Sinon, on pose $B = A^2$: pour $x \geq A^2$, la fonction racine étant croissante, $\sqrt{x} \geq \sqrt{A^2} = A$.
- On a trouvé, pour chaque A , un B qui convient : la limite vaut $+\infty$.
- Le B dépend de A : c'est permis par l'ordre « $\forall A, \exists B$ ».

Réponse. a) $\exists A, \forall B, \exists x \geq B, f(x) < A$ · b) $B = A^2$ convient.

Correction de l'exercice 9 - Continuité en un point

a) La négation d'une implication « $P \Rightarrow Q$ » est « P et non Q » :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \delta \text{ et } |f(x) - f(a)| > \varepsilon$$

- b) On prend $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Soit $\delta > 0$; on pose $x = 1 - \frac{\delta}{2}$ si $\delta < 1$, et $x = \frac{1}{2}$ sinon. Dans les deux cas $|x - 1| \leq \delta$ et $0 \leq x < 1$, donc $E(x) = 0$.
- Alors $|E(x) - E(1)| = |0 - 1| = 1 > \frac{1}{2}$: la négation est vérifiée, E n'est pas continue en 1.

Réponse. a) $\exists \varepsilon, \forall \delta, \exists x, |x - a| \leq \delta \text{ et } |f(x) - f(a)| > \varepsilon$ · b) $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 10 - Pour tout et « ou »

- (A) est **vraie** : tout entier est pair ou impair.
- (B) est **fausse** : « tous les entiers sont pairs » est faux ($n = 1$), « tous sont impairs » aussi ($n = 0$).
- On a toujours l'implication :

$$(\forall x, P(x)) \text{ ou } (\forall x, Q(x)) \Rightarrow \forall x, (P(x) \text{ ou } Q(x))$$

- mais la réciproque est fausse, comme le montre cet exemple. En revanche, « $\forall$ » se distribue sur « et » sans problème.

Réponse. (A) vraie, (B) fausse : $\forall$ ne se distribue pas sur « ou ».

Correction de l'exercice 11 - Il existe et « et »

- (A) est **fausse** : aucun réel n'est à la fois plus grand que 2 et plus petit que 1.
- (B) est **vraie** : $x = 3$ convient pour la première, $x = 0$ pour la seconde (deux témoins **différents**).
- Implication toujours vraie :

$$\exists x, (P(x) \text{ et } Q(x)) \Rightarrow (\exists x, P(x)) \text{ et } (\exists x, Q(x))$$

- La réciproque est fausse : dans (B), rien n'oblige les deux témoins à être le même x . En revanche, « $\exists$ » se distribue sur « ou ».

Réponse. (A) faux, (B) vrai ; seul $\exists(P \text{ et } Q) \Rightarrow (\exists P) \text{ et } (\exists Q)$ est toujours vrai.

Correction de l'exercice 12 - La propriété d'Archimède

- Traduction : « aussi petit que soit le nombre positif ε , on peut trouver un entier n dont l'inverse est plus petit que ε ».
- Démonstration : soit $\varepsilon > 0$. On choisit un entier $n > \frac{1}{\varepsilon}$ (par exemple $n = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$). Alors, comme $n > 0$ et $\varepsilon > 0$:

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow 1 < n\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$$

- L'entier n dépend de ε : pour $\varepsilon = 0,01$, il faut $n \geq 101$.
- Cet énoncé dit que $\frac{1}{n}$ devient aussi petit qu'on veut : c'est le cœur de $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Réponse. $n = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$ convient.

Correction de l'exercice 13 - Écrire l'unicité

- Existence **et** unicité :

$$\exists x \in \mathbb{R}, (e^x = 2 \text{ et } \forall y \in \mathbb{R}, (e^y = 2 \Rightarrow y = x))$$

- Existence : $x = \ln 2$ vérifie $e^{\ln 2} = 2$.
- Unicité : si $e^y = 2 = e^x$, alors $y = x$, car l'exponentielle est strictement croissante donc injective.
- Schéma général : on exhibe une solution, puis on montre que deux solutions sont forcément égales.

Réponse. $\exists x, (e^x = 2 \text{ et } \forall y, e^y = 2 \Rightarrow y = x) ; x = \ln 2$.

Correction de l'exercice 14 - Quantificateurs cachés

L'article « un » cache souvent un « pour tout » (règle générale) ou un « il existe » (possibilité).

- $\forall p$ premier, p est impair : **faux**, $p = 2$ est premier et pair.
- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$: **vrai**.
- « peut » signale un « il existe » :

$$\exists f \text{ dérivable sur } \mathbb{R}, f \text{ n'est pas monotone sur } \mathbb{R}$$

- **Vrai** : $f(x) = x^2$ décroît sur $\mathbb{R}_-$ et croît sur $\mathbb{R}_+$.
- Avant de démontrer, il faut toujours savoir si l'on doit prouver un « pour tout » ou exhiber un exemple.

Réponse. a) faux (2) · b) vrai · c) vrai (x^2).

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : fonctions bornées

- Définition et négation :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M \quad \forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, |f(x)| > M$$

- b) $M = 1$ convient pour $\sin$. Pour $f(x) = x$: soit M ; $x = |M| + 1$ vérifie $|f(x)| > M$; la négation est vraie.
- c) **Non** : cet énoncé est vrai pour **toute** fonction (prendre $M = |f(x)|$, qui dépend de x), y compris $x \mapsto x$.
- Échanger « $\exists M$ » et « $\forall x$ » a vidé la définition de son sens : le majorant doit être choisi avant x .

Réponse. a) $\exists M, \forall x, |f(x)| \leq M$ · b) $M = 1$; $x = |M| + 1$ · c) non, il est toujours vrai.