

## Plaquette 4 - Récurrences : simple, forte, double et pièges

### Logique et raisonnement — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

#### Boîte à outils

##### Principe de récurrence.

$$(P(n_0) \text{ et } \forall n \geq n_0, (P(n) \Rightarrow P(n+1))) \Rightarrow \forall n \geq n_0, P(n)$$

- **Double** :  $P(n_0)$  et  $P(n_0 + 1)$ , puis  $(P(n) \text{ et } P(n + 1)) \Rightarrow P(n + 2)$ .
- **Forte** :  $P(n_0)$ , puis  $(\forall k \in \llbracket n_0; n \rrbracket, P(k)) \Rightarrow P(n + 1)$ .
- **Pièges** : oublier l'initialisation ; une hérédité qui ne marche pas pour le plus petit rang ; utiliser  $P(n + 1)$  pour prouver  $P(n + 1)$ .
- **Sommes utiles** :  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ , et pour  $q \neq 1$ ,  $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$ .

#### Correction de l'exercice 1 - La somme des impairs

Soit  $P(n)$  : «  $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$  ».

- **Initialisation** : pour  $n = 1$ , la somme vaut  $1 = 1^2$ .
- **Hérédité** : soit  $n \geq 1$  tel que  $P(n)$ . Alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) = n^2 + (2(n + 1) - 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

- donc  $P(n + 1)$  est vraie.
- **Conclusion** :  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \geq 1$ .
- **Contrôle** :  $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$ .

**Réponse.**  $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$ .

#### Correction de l'exercice 2 - La somme géométrique

- **Initialisation** ( $n = 0$ ) : la somme vaut  $q^0 = 1$  et  $\frac{q - 1}{q - 1} = 1$ .

- **Hérédité** : si la formule est vraie au rang  $n$ ,

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+1} - 1 + q^{n+2} - q^{n+1}}{q - 1} = \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1}$$

- C'est la formule au rang  $n + 1$ .
- **Application** :  $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{10} = 2^{11} - 1 = 2047$ .
- **Autre preuve, sans récurrence** :  $(q - 1)(1 + q + \dots + q^n) = q^{n+1} - 1$  (somme télescopique).

**Réponse.** Mise au même dénominateur :  $\frac{q^{n+2} - 1}{q - 1}$ .

#### Correction de l'exercice 3 - Une divisibilité

Soit  $P(n)$  : « il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $4^n - 1 = 3k$  ».

- **Initialisation** :  $4^0 - 1 = 0 = 3 \times 0$ .

— **Hérédité** : si  $4^n - 1 = 3k$ , alors

$$4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = 4(4^n - 1) + 3 = 3(4k + 1)$$

— donc  $4^{n+1} - 1$  est divisible par 3.

— Autre méthode :  $4 \equiv 1 \pmod{3}$ , donc  $4^n \equiv 1$  et  $4^n - 1 \equiv 0 \pmod{3}$ .

— Contrôle :  $4^3 - 1 = 63 = 3 \times 21$ .

**Réponse.**  $4^{n+1} - 1 = 4(4^n - 1) + 3$ .

### Correction de l'exercice 4 - L'inégalité de Bernoulli

— **Initialisation** :  $(1+x)^0 = 1 \geq 1+0$ .

— **Hérédité** : supposons  $(1+x)^n \geq 1+nx$ . Comme  $1+x \geq 0$ , on peut multiplier l'inégalité par  $1+x$  sans changer son sens :

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$$

— car  $nx^2 \geq 0$ .

— L'hypothèse  $x \geq -1$  sert exactement à cette multiplication : c'est l'endroit à signaler dans la rédaction.

— Application :  $1,01^{100} \geq 1 + 100 \times 0,01 = 2$ .

**Réponse.** On multiplie par  $1+x \geq 0$ , puis  $nx^2 \geq 0$ .

### Correction de l'exercice 5 - Factorielle et puissances de 2

— **Initialisation** :  $1! = 1 = 2^0$ .

— **Hérédité** : soit  $n \geq 1$  tel que  $n! \geq 2^{n-1}$ . Alors, comme  $n+1 \geq 2$  :

$$(n+1)! = (n+1) \times n! \geq 2 \times 2^{n-1} = 2^n$$

— La propriété est vraie au rang  $n+1$ , donc pour tout  $n \geq 1$ .

— Contrôle :  $5! = 120 \geq 2^4 = 16$ . La factorielle croît bien plus vite que  $2^{n-1}$  : l'écart devient énorme ( $10! = 3\,628\,800$  contre 512).

**Réponse.**  $(n+1)! \geq 2 \times 2^{n-1}$  car  $n+1 \geq 2$ .

### Correction de l'exercice 6 - Une suite récurrente bornée

Soit  $P(n)$  : «  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$  ».

— **Initialisation** :  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = \sqrt{2} \approx 1,41$  ; on a bien  $0 \leq 0 \leq \sqrt{2} \leq 2$ .

— **Hérédité** : supposons  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ . On ajoute 2, puis on applique la racine carrée, **croissante** sur  $\mathbb{R}_+$  :

$$2 \leq 2 + u_n \leq 2 + u_{n+1} \leq 4 \Rightarrow \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$$

— donc  $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$  : c'est  $P(n+1)$ .

— Conséquence : la suite est croissante et majorée par 2, donc elle converge (sa limite est 2).

**Réponse.** On compose l'encadrement par la fonction croissante  $t \mapsto \sqrt{2+t}$ .

### Correction de l'exercice 7 - Un diviseur premier

Soit  $P(n)$  : «  $n$  admet un diviseur premier ».

— **Initialisation** : 2 est premier, il est son propre diviseur premier.

- **Hérédité forte** : soit  $n \geq 2$  ; on suppose  $P(k)$  pour tout  $k \in \llbracket 2 ; n \rrbracket$ . Deux cas pour  $n + 1$  :
  - si  $n + 1$  est premier, il est son propre diviseur premier ;
  - sinon  $n + 1 = ab$  avec  $2 \leq a \leq n$  ; par hypothèse,  $a$  a un diviseur premier  $p$ , qui divise aussi  $n + 1$ .

$$p \mid a \text{ et } a \mid n + 1 \Rightarrow p \mid n + 1$$

- Une récurrence simple ne suffirait pas : le diviseur  $a$  n'est pas forcément  $n$ .

**Réponse.** Si  $n + 1 = ab$ , le diviseur premier de  $a$  (hypothèse forte) divise  $n + 1$ .

### Correction de l'exercice 8 - Des timbres de 3 et 5 centimes

On utilise une récurrence forte avec **trois** initialisations, car l'hérédité recule de 3.

- **Initialisations** :  $8 = 3 + 5$  ;  $9 = 3 \times 3$  ;  $10 = 5 \times 2$ .
- **Hérédité** : soit  $n \geq 10$ , et supposons la propriété vraie pour tous les entiers de 8 à  $n$ . Alors  $n + 1 - 3 = n - 2 \geq 8$  s'écrit  $3a + 5b$ , et

$$n + 1 = 3(a + 1) + 5b$$

- La propriété est donc vraie pour tout  $n \geq 8$ .
- Le seuil est optimal : 7 ne s'écrit pas  $3a + 5b$  (on essaie  $b = 0$  : 7 n'est pas multiple de 3 ;  $b = 1$  : 2 non plus).

**Réponse.** Trois initialisations (8, 9, 10), puis on ajoute un timbre de 3 à  $n - 2$ .

### Correction de l'exercice 9 - La somme des nombres de Fibonacci

- **Initialisation** ( $n = 0$ ) : la somme vaut  $F_0 = 0$ , et  $F_2 - 1 = 1 - 1 = 0$ .
- **Hérédité** : si la formule est vraie au rang  $n$ ,

$$\sum_{k=0}^{n+1} F_k = F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = F_{n+3} - 1$$

- par définition de la suite.
- Une récurrence simple suffit ici : la relation de Fibonacci n'est utilisée qu'une fois, sur des termes déjà définis.
- Contrôle :  $0 + 1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 12 = F_7 - 1 = 13 - 1$ .

**Réponse.**  $F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = F_{n+3} - 1$ .

### Correction de l'exercice 10 - Une récurrence double

- $u_2 = 9 - 4 = 5$ ,  $u_3 = 15 - 6 = 9$ ,  $u_4 = 27 - 10 = 17$ . Conjecture :  $u_n = 2^n + 1$ .
- **Initialisations** :  $u_0 = 2 = 2^0 + 1$  et  $u_1 = 3 = 2^1 + 1$ .
- **Hérédité double** : si  $u_n = 2^n + 1$  et  $u_{n+1} = 2^{n+1} + 1$ , alors

$$u_{n+2} = 3(2^{n+1} + 1) - 2(2^n + 1) = 6 \times 2^n - 2 \times 2^n + 1 = 2^{n+2} + 1$$

- Deux initialisations sont indispensables : la relation fait intervenir deux termes précédents.

**Réponse.**  $u_n = 2^n + 1$  (récurrence double).

### Correction de l'exercice 11 - Dérivées successives

- **Initialisation** :  $f^{(0)}(x) = f(x) = (x + 0)e^x$ .
- **Hérédité** : si  $f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$ , on dérive ce produit :

$$f^{(n+1)}(x) = 1 \times e^x + (x+n)e^x = (x+n+1)e^x$$

- La formule est vraie au rang  $n+1$ .
- Application :  $f^{(10)}(0) = 10$ .
- On aurait aussi pu utiliser la formule de Leibniz : seules les dérivées d'ordre 0 et 1 de  $x$  sont non nulles.

**Réponse.**  $((x+n)e^x)' = (x+n+1)e^x$ .

### Correction de l'exercice 12 - Tous les chevaux de la même couleur

L'initialisation est juste ; l'erreur est dans l'hérédité, qui doit valoir **pour tout**  $n \geq 1$ .

- Pour  $n = 1$  : on a 2 chevaux. Les «  $n$  premiers » sont le cheval 1, les «  $n$  derniers » le cheval 2 : les deux groupes n'ont **aucun** cheval en commun.

$$\{1\} \cap \{2\} = \emptyset$$

- L'implication  $P(1) \Rightarrow P(2)$  n'est donc pas démontrée (et elle est fausse).
- Pour  $n \geq 2$ , l'argument marcherait ; mais la chaîne est cassée dès le premier maillon.
- Leçon : vérifier que l'hérédité fonctionne dès le rang d'initialisation.

**Réponse.** L'hérédité échoue de  $n = 1$  à  $n = 2$  : les deux groupes ne se chevauchent pas.

### Correction de l'exercice 13 - Hérédité sans initialisation

a) Si  $4^n + 1 = 3k$ , alors

$$4^{n+1} + 1 = 4(4^n + 1) - 3 = 3(4k - 1)$$

- L'hérédité est donc vraie.
- b) Mais  $P(0)$  :  $4^0 + 1 = 2$ , non divisible par 3. En fait  $P(n)$  est **fausse pour tout**  $n$  : d'après l'exercice sur  $4^n - 1$ , on a  $4^n + 1 = (4^n - 1) + 2$ , dont le reste dans la division par 3 vaut 2.
- Une hérédité seule ne prouve rien : sans initialisation, la « chaîne » ne démarre jamais.

**Réponse.** a) oui · b) non : faux dès  $n = 0$ , et en fait pour tout  $n$ .

### Correction de l'exercice 14 - Le nombre de parties

Soit  $P(n)$  : « tout ensemble à  $n$  éléments a  $2^n$  parties ».

- **Initialisation** : l'ensemble vide n'a qu'une partie, lui-même :  $1 = 2^0$ .
- **Hérédité** : soit  $E$  à  $n+1$  éléments,  $a \in E$ , et  $E' = E \setminus \{a\}$  ( $n$  éléments). Une partie de  $E$  soit ne contient pas  $a$  (c'est une partie de  $E'$ ), soit contient  $a$  (c'est  $\{a\}$  réuni à une partie de  $E'$ ). Par hypothèse, il y en a  $2^n$  de chaque sorte :

$$2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

- Contrôle :  $\{1, 2\}$  a 4 parties :  $\emptyset$ ,  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{1, 2\}$ .

**Réponse.** On sépare les parties contenant  $a$  de celles qui ne le contiennent pas.

### Correction de l'exercice 15 - Synthèse : conjecturer puis démontrer

a)  $u_1 = 6 - 0 = 6$  ;  $u_2 = 12 - 1 = 11$  ;  $u_3 = 22 - 2 = 20$ . La formule donne  $4 + 2 = 6$ ,  $8 + 3 = 11$ ,  $16 + 4 = 20$ .

b) **Initialisation** :  $u_0 = 3 = 2^1 + 0 + 1$ . **Hérédité** : si  $u_n = 2^{n+1} + n + 1$ ,

$$u_{n+1} = 2(2^{n+1} + n + 1) - n = 2^{n+2} + n + 2 = 2^{(n+1)+1} + (n+1) + 1$$

- c)  $u_n \geq 2^{n+1}$  et  $2^{n+1} \rightarrow +\infty$  : par comparaison,  $u_n \rightarrow +\infty$ .
- Une formule conjecturée sur quelques termes n'est **pas** démontrée : la récurrence est indispensable.

**Réponse.** a) 6, 11, 20 · b) récurrence · c)  $+\infty$ .