

Plaquette 5 – Rédiger une démonstration : choisir sa méthode

Logique et raisonnement — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Schémas de rédaction.

- **Absurde** : « Supposons, par l'absurde, que ... » ; on déduit une contradiction ; « donc ... ».
- **Contraposée** : pour montrer $P \Rightarrow Q$, on montre $\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$.

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P)$$
- **Analyse-synthèse** : *analyse* — on suppose qu'une solution existe et on en déduit sa forme (d'où l'unicité) ; *synthèse* — on vérifie que cette forme convient (d'où l'existence).
- **Disjonction de cas** : les cas doivent recouvrir toutes les possibilités (parité, reste modulo 3, signe...).
- **Principe des tiroirs** : si $n + 1$ objets sont rangés dans n tiroirs, un tiroir en contient au moins deux.

Correction de l'exercice 1 – Racine de 3

- a) Par **contraposée** : si $3 \nmid n$, alors $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$. Dans le premier cas $n^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$; dans le second, $n^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$. Dans les deux cas, $3 \nmid n^2$.
- b) Par **l'absurde**, supposons $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers, $q \neq 0$, fraction irréductible. Alors

$$p^2 = 3q^2$$

- donc $3 \mid p^2$, puis $3 \mid p$ par a) : $p = 3k$. Alors $9k^2 = 3q^2$, soit $q^2 = 3k^2$, donc $3 \mid q$.
- 3 divise p et q : la fraction n'était pas irréductible, contradiction. Donc $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Réponse. a) contraposée avec les restes 1 et 2 · b) absurde : 3 divise p et q .

Correction de l'exercice 2 – Une infinité de nombres premiers

Par l'absurde, supposons qu'il n'y ait qu'un nombre fini de nombres premiers : $p_1, p_2, \dots, p_r$. On pose

$$N = p_1 p_2 \cdots p_r + 1$$

- $N \geq 2$, donc N admet un diviseur premier p (récurrence forte de la plaquette précédente). Ce p est l'un des p_i .
- Alors p divise N et divise le produit $p_1 \cdots p_r$, donc il divise leur différence, qui vaut 1 : impossible.
- Il y a donc une infinité de nombres premiers.
- Attention : N n'est pas forcément premier ($2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1 = 30\,031 = 59 \times 509$) ; il a seulement un diviseur premier nouveau.

Réponse. $N = p_1 \cdots p_r + 1$ n'est divisible par aucun p_i .

Correction de l'exercice 3 - Un logarithme irrationnel

Par l'absurde, supposons $\log_{10} 2 = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers et $q > 0$. Comme $1 < 2 < 10$, on a $0 < \log_{10} 2 < 1$, donc $p \geq 1$. Par définition du logarithme décimal :

$$10^{p/q} = 2 \Rightarrow 10^p = 2^q$$

- Le nombre 10^p est divisible par 5 (car $p \geq 1$), alors que 2^q ne l'est pas : ses seuls facteurs premiers sont des 2.
- C'est une contradiction : $\log_{10} 2$ est irrationnel.
- Même argument pour $\log_{10} 3$: $10^p = 3^q$ est impossible pour $p \geq 1$.

Réponse. $10^p = 2^q$ est impossible (5 divise l'un, pas l'autre).

Correction de l'exercice 4 - Somme de deux rationnels

On procède par **contraposée**. La négation de « a ou b irrationnel » est « a et b rationnels » (De Morgan), celle de « $a + b$ irrationnel » est « $a + b$ rationnel ». Il suffit donc de montrer :

$$a \in \mathbb{Q} \text{ et } b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a + b \in \mathbb{Q}$$

- Si $a = \frac{p}{q}$ et $b = \frac{r}{s}$ (avec $q, s \neq 0$), alors $a + b = \frac{ps + qr}{qs}$ est un quotient d'entiers, avec $qs \neq 0$: c'est un rationnel.
- La contraposée étant vraie, l'énoncé l'est aussi.
- La réciproque est fautive : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont irrationnels, leur somme 0 est rationnelle.

Réponse. Contraposée : deux rationnels ont une somme rationnelle.

Correction de l'exercice 5 - Une contraposée algébrique

Montrer directement qu'un produit est « différent » est malcommode : on montre la **contraposée**, « si $(x + 1)(y - 1) = (x - 1)(y + 1)$, alors $x = y$ ».

- On développe les deux membres :

$$xy - x + y - 1 = xy + x - y - 1$$

- On simplifie : $-x + y = x - y$, soit $2y = 2x$, donc $x = y$.
- La contraposée est démontrée, donc l'implication aussi.
- Une égalité se manipule facilement ; une « non-égalité » presque jamais : c'est le cas typique où la contraposée s'impose.

Réponse. Contraposée : l'égalité des produits donne $2y = 2x$.

Correction de l'exercice 6 - Pair plus impair

Analyse : supposons $f = g + h$ avec g paire et h impaire. Pour tout x : $f(x) = g(x) + h(x)$ et $f(-x) = g(x) - h(x)$. En additionnant et en soustrayant :

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

- g et h sont donc imposées : s'il y a une décomposition, c'est celle-ci (**unicité**).
- **Synthèse** : on définit g et h par ces formules. Alors $g + h = f$, $g(-x) = g(x)$ et $h(-x) = -h(x)$: elles conviennent (**existence**).
- Exemple : $e^x = \cosh x + \sinh x$.

Réponse. $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$, $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$.

Correction de l'exercice 7 - Une équation fonctionnelle

Analyse : soit f une solution. On choisit $x = 0$: pour tout y , $f(y) = f(0) + y$. En notant $c = f(0)$:

$$\forall y \in \mathbb{R}, f(y) = y + c$$

- Toute solution est donc de cette forme.
- **Synthèse** : soit $c \in \mathbb{R}$ et $f(x) = x + c$. Pour tous x, y : $f(x + y) = x + y + c$ et $f(x) + y = x + c + y$. Ces deux quantités sont égales : f convient.
- **Conclusion** : les solutions sont exactement les fonctions $x \mapsto x + c$, $c \in \mathbb{R}$.
- Sans la synthèse, on aurait seulement prouvé « si f est solution, elle est de cette forme », pas que ces fonctions sont solutions.

Réponse. Les fonctions $x \mapsto x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 8 - Carrés modulo 4

a) **Disjonction selon la parité** de n . Si $n = 2p$, $n^2 = 4p^2$. Si $n = 2p + 1$,

$$n^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 4(p^2 + p) + 1$$

- b) Soient a et b entiers. D'après a), a^2 et b^2 ont pour reste 0 ou 1 dans la division par 4 ; donc $a^2 + b^2$ a pour reste 0, 1 ou 2, jamais 3.
- Un entier $4m + 3$ n'est donc jamais une somme de deux carrés : 3, 7, 11, 15... ne le sont pas.
- Contrôle : 7 ne s'écrit pas avec 0, 1, 4 (0 + 1, 1 + 4, 4 + 4 ne donnent pas 7).

Réponse. a) deux cas selon la parité · b) $a^2 + b^2$ a pour reste 0, 1 ou 2 modulo 4.

Correction de l'exercice 9 - Somme de valeurs absolues

Disjonction de cas selon la position de x par rapport à -1 et 1 (là où les expressions changent de signe).

- Si $x \leq -1$: la somme vaut $(1 - x) + (-x - 1) = -2x \geq 2$.
- Si $-1 \leq x \leq 1$: elle vaut $(1 - x) + (x + 1) = 2$.
- Si $x \geq 1$: elle vaut $(x - 1) + (x + 1) = 2x \geq 2$.

$$|x - 1| + |x + 1| \geq 2, \text{ avec égalité } \Leftrightarrow x \in [-1 ; 1]$$

- Interprétation : c'est la somme des distances de x à 1 et à -1 ; elle est minimale quand x est entre les deux points.

Réponse. Trois cas ; égalité si et seulement si $-1 \leq x \leq 1$.

Correction de l'exercice 10 - Le principe des tiroirs

On partage le carré en 4 petits carrés de côté 1 (les « tiroirs »). Les 5 points sont les « objets » : comme $5 > 4$, au moins deux points sont dans le même petit carré (bords compris).

- Deux points d'un même carré de côté 1 sont à une distance au plus égale à sa diagonale :

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

- Donc deux des points sont à une distance $\leq \sqrt{2}$.
- Le résultat est optimal : avec 4 points aux sommets du grand carré, les distances sont 2 ou $2\sqrt{2}$, toutes plus grandes que $\sqrt{2}$.

Réponse. 4 petits carrés pour 5 points : deux dans le même, distance $\leq \sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 11 - Réfuter par un contre-exemple

Chaque énoncé commence par un « pour tout » caché : un seul contre-exemple suffit à le réfuter.

- a) **Faux** : $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q}$.
- b) **Faux** : $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$.
- c) **Faux** : pour $x = -3$, $\sqrt{9} = 3 \neq -3$. La bonne formule est

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

— Un contre-exemple doit être **explicite** et **vérifié** : il faut montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel (c'est l'exercice de la plaquette 1), sinon l'argument est incomplet.

Réponse. Tous faux : $\sqrt{2} + (-\sqrt{2})$, $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$, $x = -3$.

Correction de l'exercice 12 - Pas de plus petit réel strictement positif

Par l'absurde, supposons qu'il existe $m > 0$ tel que $m \leq x$ pour tout réel $x > 0$. Le réel $\frac{m}{2}$ est strictement positif, donc

$$m \leq \frac{m}{2} = 2m \leq m = m \leq 0$$

- ce qui contredit $m > 0$. Il n'existe donc pas de plus petit réel strictement positif.
- Dans $\mathbb{N}^*$, c'est faux : 1 est le plus petit élément. L'argument échoue car $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}^*$.
- La démonstration utilise une propriété de $\mathbb{R}$ (on peut diviser par 2) : il faut toujours vérifier dans quel ensemble on travaille.

Réponse. $\frac{m}{2}$ serait plus petit ; dans $\mathbb{N}^*$, 1 est le minimum.

Correction de l'exercice 13 - Moyenne arithmétique et géométrique

Preuve directe : on part d'un carré, toujours positif.

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

- On a utilisé $(\sqrt{a})^2 = a$ et $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, valables car $a, b \geq 0$.
- **Égalité** si et seulement si $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$, c'est-à-dire $a = b$.
- Application : parmi les rectangles de périmètre 4 ($a + b = 2$), l'aire $ab \leq 1$ est maximale pour le carré de côté 1.

Réponse. $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$; égalité si et seulement si $a = b$.

Correction de l'exercice 14 - Une équivalence sur les entiers

On démontre les **deux implications**.

- $(\Rightarrow)$ Si n est impair, $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$ est le produit de deux entiers pairs **consécutifs** ; l'un des deux est multiple de 4. Le produit est donc multiple de $2 \times 4 = 8$.

$$n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 - 1 = 4k(k + 1)$$

- et $k(k + 1)$ est pair (produit de deux consécutifs) : on retrouve un multiple de 8.
- $(\Leftarrow)$ Par contraposée : si n est pair, $n^2 - 1$ est impair, donc pas divisible par 8.
- Contrôle : $7^2 - 1 = 48 = 8 \times 6$; $4^2 - 1 = 15$ n'est pas multiple de 8.

Réponse. $n^2 - 1 = 4k(k + 1)$ si $n = 2k + 1$; contraposée pour la réciproque.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : choisir sa méthode

a) **Directe** (factorisation) : $n^3 - n = (n - 1)n(n + 1)$ est un produit de trois entiers consécutifs, dont l'un est multiple de 3.

b) **Absurde** : si $r = \sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, alors

$$r^2 = 5 + 2\sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{6} = \frac{r^2 - 5}{2} \in \mathbb{Q}$$

— ce qui contredit l'irrationalité de $\sqrt{6}$.

— c) **Contraposée** : si a ou b est pair, disons $a = 2k$, alors $ab = 2kb$ est pair.

— d) **Exemple** (un « il existe » se prouve par un témoin) : $x = 2$ convient, car $2^3 = 8 = 2 + 6$.

Réponse. a) trois consécutifs · b) absurde via $\sqrt{6}$ · c) contraposée · d) $x = 2$.