

Plaquette 2 - Logique propositionnelle : tables de vérité et équivalences

Logique et raisonnement — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Règles de calcul propositionnel.

- Tables élémentaires : « P et Q » n'est vraie que si les deux le sont ; « P ou Q » (inclusif) n'est fausse que si les deux le sont.

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non}P \text{ ou } Q) \quad (P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P))$$

- Lois de De Morgan :

$$\text{non}(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow \text{non}P \text{ ou } \text{non}Q \quad \text{non}(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow \text{non}P \text{ et } \text{non}Q$$

- Distributivité : $P \text{ et } (Q \text{ ou } R) \Leftrightarrow (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$, et la même en échangeant « et » et « ou ».
- Négations utiles : $\text{non}(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \text{ et } \text{non}Q$.

Correction de l'exercice 1 - Tiers exclu et contradiction

Il n'y a qu'une variable : deux lignes.

P	$\text{non}P$	$P \text{ ou } \text{non}P$	$P \text{ et } \text{non}P$
V	F	V	F
F	V	V	F

- « $P \text{ ou } \text{non}P$ » est vraie sur toutes les lignes : c'est une **tautologie** (principe du **tiers exclu**).
- « $P \text{ et } \text{non}P$ » est fausse sur toutes les lignes : c'est une **contradiction**.

$$\text{non}(P \text{ et } \text{non}P) \Leftrightarrow \text{non}P \text{ ou } P$$

- La négation d'une contradiction est une tautologie : c'est ce qu'exploite le raisonnement par l'absurde.

Réponse. La première est une tautologie, la seconde une contradiction.

Correction de l'exercice 2 - Les lois de De Morgan

P	Q	$P \text{ et } Q$	$\text{non}(P \text{ et } Q)$	$\text{non}P$	$\text{non}Q$	$\text{non}P \text{ ou } \text{non}Q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

- Les colonnes 4 et 7 coïncident : les propositions sont équivalentes.
- Seconde loi : on applique la première à $\text{non}P$ et $\text{non}Q$, puis on prend la négation des deux membres :

$$\text{non}(\text{non}P \text{ et } \text{non}Q) \Leftrightarrow P \text{ ou } Q \quad \text{donc} \quad \text{non}(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow \text{non}P \text{ et } \text{non}Q$$

Réponse. Colonnes identiques ; $\text{non}(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow \text{non}P \text{ et } \text{non}Q$.

Correction de l'exercice 3 – Distributivité

Trois variables : $2^3 = 8$ lignes. On note $A = P \text{ et } (Q \text{ ou } R)$, $B = (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$.

P	Q	R	$Q \text{ ou } R$	A	$P \text{ et } Q$	$P \text{ et } R$	B
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

— Les colonnes A et B coïncident.

$$P \text{ et } (Q \text{ ou } R) \Leftrightarrow (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$$

— Sans table : si P est fausse, les deux membres sont faux ; si P est vraie, les deux valent « $Q \text{ ou } R$ ».

Réponse. Les colonnes A et B sont identiques.

Correction de l'exercice 4 – Une simplification

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Rightarrow \text{non}Q$	conjonction	$\text{non}P$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

— Les deux dernières colonnes coïncident. Par le calcul :

$$(\text{non}P \text{ ou } Q) \text{ et } (\text{non}P \text{ ou } \text{non}Q) \Leftrightarrow \text{non}P \text{ ou } (Q \text{ et } \text{non}Q) \Leftrightarrow \text{non}P$$

— **Interprétation** : si une hypothèse P entraîne à la fois Q et sa négation, alors P est fausse. C'est exactement le schéma du **raisonnement par l'absurde**.

Réponse. Équivalente à $\text{non}P$: c'est le principe de l'absurde.

Correction de l'exercice 5 – Transitivité de l'implication

Une implication n'est fausse que si son hypothèse est vraie et sa conclusion fausse. On cherche donc un cas où la proposition serait **fausse** :

- il faudrait $P \Rightarrow R$ fausse, donc P vraie et R fausse ;
- et l'hypothèse vraie : $P = Q$ vraie avec P vraie impose Q vraie ; puis $Q \Rightarrow R$ vraie avec Q vraie impose R vraie.

R vraie et R fausse : contradiction

- Aucun cas ne rend la proposition fausse : c'est une **tautologie**.
- C'est la règle qui permet d'enchaîner des implications dans une démonstration : $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ donne $P \Rightarrow R$.

Réponse. Le seul cas qui la rendrait fausse est contradictoire : c'est une tautologie.

Correction de l'exercice 6 - Le ou exclusif

P	Q	$P \oplus Q$	$P \text{ et } \text{non}Q$	$\text{non}P \text{ et } Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	F	F	V
V	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F
F	F	F	F	F	V

- a) Troisième colonne.
 b) La disjonction des colonnes 4 et 5 vaut F, V, V, F : c'est la colonne de $P \oplus Q$.
 c) La négation de la dernière colonne vaut F, V, V, F : même colonne.

$$P \oplus Q \Leftrightarrow \text{non}(P \Leftrightarrow Q)$$

— Le « ou » du langage courant (« fromage ou dessert ») est souvent exclusif ; le « ou » mathématique est **inclusif**.

Réponse. $P \oplus Q$: F, V, V, F ; égal aux deux expressions proposées.

Correction de l'exercice 7 - Ni l'un ni l'autre

- a) « ni A ni B » signifie $\text{non}A$ et $\text{non}B$, c'est-à-dire $\text{non}(A \text{ ou } B)$. Négation : « x est positif **ou** entier ».
 b) « mais » est un « et » : P et $\text{non}F$. Négation (De Morgan) : « il ne pleut pas **ou** il fait froid ».
 c) « V seulement si B » signifie $V \Rightarrow B$ (le beau temps est **nécessaire**). Négation :

$$\text{non}(V \Rightarrow B) \Leftrightarrow V \text{ et } \text{non}B$$

— soit « je viens et il ne fait pas beau ». Attention : « seulement si » ne se traduit pas par $B \Rightarrow V$.

Réponse. a) négation : positif ou entier · b) il ne pleut pas ou il fait froid · c) je viens et il ne fait pas beau.

Correction de l'exercice 8 - La négation d'une promesse

L'affirmation est une implication $P \Rightarrow Q$ avec P : « il pleut » et Q : « je prends mon parapluie ». Sa négation est :

$$\text{non}(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \text{ et } \text{non}Q$$

- C'est la phrase **c)** : la seule situation où l'élève a menti.
 — a) est une autre implication, compatible avec la première si... il ne pleut jamais : ce n'est pas une négation.
 — b) et d) décrivent des situations où il ne pleut pas : l'affirmation n'y est pas contredite (une implication d'hypothèse fausse est vraie).

Réponse. La phrase c).

Correction de l'exercice 9 - Chevaliers et fripons

On note A : « Arthur est chevalier », B : « Bruno est chevalier ». Un habitant est chevalier si et seulement si ce qu'il dit est vrai :

$$A \Leftrightarrow \text{non}B \quad B \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$$

- **Cas A vraie** : alors $\text{non}B$ est vraie, Bruno est fripon. Sa phrase « même espèce » est fausse (Arthur chevalier, Bruno fripon) : cohérent avec B fausse.
- **Cas A fausse** : alors $\text{non}B$ est fausse, Bruno est chevalier. Sa phrase « même espèce » devrait être vraie, mais Arthur est fripon et Bruno chevalier : **contradiction**.
- **Conclusion** : Arthur est chevalier, Bruno est fripon.

Réponse. Arthur est chevalier, Bruno est fripon.

Correction de l'exercice 10 - Une tautologie

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$	implication totale
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

- Les colonnes 3 et 4 sont **identiques** : l'implication de l'une vers l'autre est donc toujours vraie (tautologie).
- La réciproque $(\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$ est aussi une tautologie, pour la même raison : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P)$
- C'est la justification logique du **raisonnement par contraposée**.

Réponse. Oui, et sa réciproque aussi : implication et contraposée sont équivalentes.

Correction de l'exercice 11 - Implication ou équivalence ?

- $x^2 = x \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$: $\Leftrightarrow$ (produit nul).
- Si $x = 2$, $x^2 = 4$; mais $x = -2$ vérifie $x^2 = 4$ sans être égal à 2 : seulement $\Leftarrow$.
- Si $x > 1$, $x^2 > x > 1$; mais $x = -2$ donne $x^2 = 4 > 1$: seulement $\Rightarrow$.
- Par définition de la valeur absolue :

$$|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

- $\Leftrightarrow$. Méthode : pour chaque sens, soit une preuve, soit un contre-exemple.

Réponse. a) $\Leftrightarrow$ · b) $\Leftarrow$ · c) $\Rightarrow$ · d) $\Leftrightarrow$.

Correction de l'exercice 12 - Contraposée d'un théorème

La contraposée de $P \Rightarrow Q$ est $\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$, et elle a la même valeur de vérité.

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P)$$

- a) « Si f n'est pas continue en a , alors f n'est pas dérivable en a . » Utilisation : la fonction partie entière, discontinue en 1, n'est pas dérivable en 1.
- b) « Si une suite n'est pas bornée, alors elle diverge. » Utilisation : $u_n = n^2$ n'est pas majorée, donc diverge.
- En revanche, les réciproques sont fausses : $x \mapsto |x|$ est continue non dérivable en 0 ; $(-1)^n$ est bornée et diverge.

Réponse. a) non continue $\Rightarrow$ non dérivable · b) non bornée $\Rightarrow$ divergente.

Correction de l'exercice 13 - Une chaîne d'équivalences

Un cycle d'implications suffit : chaque proposition implique alors toutes les autres (transitivité).

- (i) $\Rightarrow$ (iii) : si $n = 2k$, $n^3 = 8k^3 = 2(4k^3)$ est pair.
- (iii) $\Rightarrow$ (ii) : par contraposée. Si n^2 est impair, alors n est impair (sinon n^2 serait pair), donc $n^3 = n \times n^2$ est un produit d'impairs, impair.
- (ii) $\Rightarrow$ (i) : par contraposée. Si $n = 2k + 1$,

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \text{ est impair}$$
- Les trois propositions sont équivalentes. Trois implications au lieu de six : c'est tout l'intérêt du cycle.

Réponse. Cycle (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i), les deux dernières par contraposée.

Correction de l'exercice 14 - Négation d'une équivalence

$P \Leftrightarrow Q$ signifie $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$. Par De Morgan puis la négation de l'implication :

$$\text{non}(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \text{ et non}Q) \text{ ou } (Q \text{ et non}P)$$

- Application : « $(x \geq 0 \text{ et } x^2 \neq x)$ ou $(x^2 = x \text{ et } x < 0)$ ».
- Pour $x = 2$: $x \geq 0$ et $x^2 = 4 \neq 2$: la négation est **vraie**, donc l'équivalence est **fausse** pour $x = 2$.
- On retrouve le ou exclusif : $P \Leftrightarrow Q$ est fausse exactement quand une seule des deux est vraie.

Réponse. $(P \text{ et non}Q) \text{ ou } (Q \text{ et non}P)$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : simplifier une expression

- Pour E : négation de l'implication, puis De Morgan.

$$E \Leftrightarrow P \text{ et non}(Q \text{ et } R) \Leftrightarrow P \text{ et } (\text{non}Q \text{ ou } \text{non}R)$$

- Pour F : distributivité, puis contradiction P et $\text{non}P$: $F \Leftrightarrow (P \text{ et non}P) \text{ ou } (Q \text{ et non}P) \Leftrightarrow Q \text{ et non}P$.

P	Q	$P \text{ ou } Q$	F	$Q \text{ et non}P$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	F	F	F	F

- Les deux dernières colonnes coïncident : $F \Leftrightarrow Q \text{ et non}P$.

Réponse. $E \Leftrightarrow P \text{ et } (\text{non}Q \text{ ou } \text{non}R)$; $F \Leftrightarrow Q \text{ et non}P$.