

Plaquette 1 – Connecteurs, quantificateurs et modes de démonstration

Logique et raisonnement — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

On traduit un énoncé en **quantificateurs**, on écrit sa **négation**, et on choisit le bon mode de preuve : direct, **contraposée**, **absurde**, **réurrence**, **contre-exemple** ou **disjonction de cas**.

Exercice 1 – Négation d'un énoncé quantifié

Écrire la négation de : « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$ ».

Exercice 2 – Ordre des quantificateurs

Comparer les deux énoncés :

- (A) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x$
- (B) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y > x$

Exercice 3 – Implication et table de vérité

À l'aide d'une table de vérité, montrer que $P \Rightarrow Q$ a la même valeur de vérité que $(\text{non}P) \vee Q$. En déduire la négation de $P \Rightarrow Q$.

Exercice 4 – Réciproque ou contraposée ?

Soit l'énoncé (I) : « pour tout réel x , si $x > 2$ alors $x^2 > 4$ ».

- a) Écrire sa réciproque et sa contraposée.
- b) Dire, pour chacune des trois, si elle est vraie ou fausse.

Exercice 5 – Condition nécessaire, condition suffisante

Pour un entier naturel n , compléter par « nécessaire », « suffisante » ou « nécessaire et suffisante » :

- a) « n est multiple de 4 » est une condition ... pour que n soit pair.
- b) « n est pair » est une condition ... pour que n soit multiple de 6.
- c) « n^2 est pair » est une condition ... pour que n soit pair.

Exercice 6 – Contraposée

Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est pair alors n est pair.

Exercice 7 – Raisonnement par l'absurde

Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 8 - Contre-exemple

L'énoncé « pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + n + 41$ est premier » est-il vrai ?

Exercice 9 - Récurrence simple

Démontrer que pour tout $n \geq 1$: $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 10 - Récurrence forte

Soit $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Montrer que $u_n \leq 2^n$ pour tout n .

Exercice 11 - Disjonction de cas

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n(n+1)$ est pair.

Exercice 12 - Équivalence

Démontrer que pour x, y réels : $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.

Exercice 13 - Existence et unicité

Montrer que l'équation $x^3 + x = 1$ admet une unique solution réelle.

Exercice 14 - Négation d'une définition

Écrire, avec des quantificateurs, que la suite (u_n) **ne converge pas** vers l .

Exercice 15 - Récurrence et inégalité

Démontrer que pour tout $n \geq 4$: $2^n \geq n^2$.