

Plaquette 3 - Quantificateurs : traduire, nier, décider

Logique et raisonnement — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Pour **traduire** une définition, on repère les objets (réels, entiers, fonctions), puis les mots « pour tout », « il existe », « tel que », et on les écrit dans l'ordre où ils sont choisis. Pour **nier**, on échange $\forall$ et $\exists$ sans changer l'ordre, et l'on nie la propriété finale (les domaines, comme « $\varepsilon > 0$ », restent inchangés). Pour **décider** si un énoncé est vrai, on prouve un « $\forall$ » par un argument général et un « $\exists$ » par un exemple ; on réfute un « $\forall$ » par un contre-exemple.

Exercice 1 - Traduire des définitions

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et (u_n) une suite réelle. Écrire avec des quantificateurs :

- a) f est majorée ;
- b) f s'annule ;
- c) f est constante ;
- d) (u_n) est croissante.

Exercice 2 - Nier ces définitions

Écrire la négation des quatre énoncés de l'exercice précédent, puis la traduire en français.

Exercice 3 - Vrai ou faux ?

Dire si chaque énoncé est vrai ou faux, et le justifier.

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$
- b) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < x$
- c) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m > n$
- d) $\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, m \geq n$

Exercice 4 - Une racine carrée pour tous ?

Dire si les énoncés sont vrais :

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 = x$
- b) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 = x$
- c) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists! y \in \mathbb{R}, y^2 = x$
- d) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+, y^2 = x$

Exercice 5 - Injectivité

Une application $f: E \rightarrow F$ est injective si deux éléments distincts ont des images distinctes.

- a) Écrire cette définition avec des quantificateurs, puis sa forme contraposée usuelle.
- b) Écrire la négation.
- c) $x \mapsto x^2$ est-elle injective sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 6 - Surjectivité

Une application $f:E \rightarrow F$ est surjective si tout élément de F a au moins un antécédent.

- a) Écrire la définition et sa négation.
- b) $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ est-elle surjective ? Et $g:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^2$?

Exercice 7 - Fonction périodique

Écrire avec des quantificateurs « $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est périodique », puis « f n'est pas périodique ». Montrer que $x \mapsto x^2$ n'est pas périodique.

Exercice 8 - Limite infinie

La définition de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ est : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \geq B, f(x) \geq A$.

- a) Écrire sa négation.
- b) Montrer, avec la définition, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Exercice 9 - Continuité en un point

f est continue en a si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.

- a) Écrire la négation.
- b) Montrer que la fonction partie entière E n'est pas continue en 1.

Exercice 10 - Pour tout et « ou »

Sur $\mathbb{Z}$, on note $P(n)$: « n est pair » et $I(n)$: « n est impair ». Comparer :

- (A) $\forall n \in \mathbb{Z}, (P(n) \text{ ou } I(n))$;
- (B) $(\forall n \in \mathbb{Z}, P(n)) \text{ ou } (\forall n \in \mathbb{Z}, I(n))$.

Exercice 11 - Il existe et « et »

Comparer, sur $\mathbb{R}$:

- (A) $\exists x, (x > 2 \text{ et } x < 1)$;
- (B) $(\exists x, x > 2) \text{ et } (\exists x, x < 1)$.

Quelle implication générale est toujours vraie ?

Exercice 12 - La propriété d'Archimède

Traduire en français l'énoncé $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} < \varepsilon$, puis le démontrer.

Exercice 13 – Écrire l'unicité

Écrire avec des quantificateurs, sans le symbole $\exists!$, l'énoncé « l'équation $e^x = 2$ a une unique solution réelle », puis le démontrer.

Exercice 14 – Quantificateurs cachés

Réécrire avec des quantificateurs, puis dire si c'est vrai :

- a) « Un nombre premier est impair. »
- b) « Le carré d'un réel est positif. »
- c) « Une fonction dérivable peut ne pas être monotone. »

Exercice 15 – Synthèse : fonctions bornées

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- a) Écrire « f est bornée » et sa négation.
- b) Montrer que $\sin$ est bornée et que $x \mapsto x$ ne l'est pas.
- c) L'énoncé $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$ caractérise-t-il les fonctions bornées ?