

## Plaquette 4 - Récurrences : simple, forte, double et pièges

### Logique et raisonnement — Licence 1 (L1)

#### Exercices

##### Méthode

Une démonstration par récurrence comporte toujours trois parties rédigées : l'**énoncé** de la propriété  $P(n)$  (avec le rang de départ), l'**initialisation** (vérification de  $P(n_0)$ ), l'**hérédité** (pour un  $n \geq n_0$  quelconque,  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ ). Si le passage au rang  $n+1$  a besoin de plusieurs rangs précédents, on fait une récurrence **double** (deux initialisations) ou **forte** (on suppose  $P(k)$  pour tous les  $k$  de  $n_0$  à  $n$ ). Les deux étapes sont indispensables : une hérédité sans initialisation ne prouve rien.

##### Exercice 1 - La somme des impairs

Démontrer par récurrence que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$ .

##### Exercice 2 - La somme géométrique

Soit  $q \neq 1$  un réel. Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$ .

##### Exercice 3 - Une divisibilité

Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $4^n - 1$  est divisible par 3.

##### Exercice 4 - L'inégalité de Bernoulli

Soit  $x \geq -1$ . Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(1+x)^n \geq 1+nx$ .

##### Exercice 5 - Factorielle et puissances de 2

Démontrer que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $n! \geq 2^{n-1}$ .

##### Exercice 6 - Une suite récurrente bornée

Soit  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ . Démontrer que pour tout  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ .

##### Exercice 7 - Un diviseur premier

Démontrer par récurrence forte que tout entier  $n \geq 2$  admet au moins un diviseur premier.

##### Exercice 8 - Des timbres de 3 et 5 centimes

Démontrer que tout affranchissement de  $n \geq 8$  centimes peut se faire avec des timbres de 3 et de 5 centimes, c'est-à-dire que  $n = 3a + 5b$  avec  $a, b \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 9 - La somme des nombres de Fibonacci**

On pose  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  et  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ . Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=0}^n F_k = F_{n+2} - 1$ .

**Exercice 10 - Une récurrence double**

Soit  $u_0 = 2$ ,  $u_1 = 3$  et  $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ . Calculer  $u_2$ ,  $u_3$ ,  $u_4$ , conjecturer une formule, puis la démontrer.

**Exercice 11 - Dérivées successives**

Soit  $f(x) = x e^x$  sur  $\mathbb{R}$ . Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(n)}(x) = (x + n) e^x$ .

**Exercice 12 - Tous les chevaux de la même couleur**

Où est l'erreur dans ce « raisonnement » ?  $P(n)$  : « dans tout groupe de  $n$  chevaux, tous ont la même couleur ».  $P(1)$  est vraie. Si  $P(n)$  est vraie, prenons  $n + 1$  chevaux ; les  $n$  premiers ont la même couleur, les  $n$  derniers aussi ; comme ces deux groupes ont des chevaux en commun, tous ont la même couleur.

**Exercice 13 - Hérité sans initialisation**

Soit  $P(n)$  : «  $4^n + 1$  est divisible par 3 ».

- a) Montrer que  $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$  pour tout  $n$ .
- b)  $P(n)$  est-elle vraie pour tout  $n$  ?

**Exercice 14 - Le nombre de parties**

Démontrer par récurrence qu'un ensemble à  $n$  éléments possède  $2^n$  parties.

**Exercice 15 - Synthèse : conjecturer puis démontrer**

Soit  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 3$  et  $u_{n+1} = 2u_n - n$ .

- a) Calculer  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ .
- b) Démontrer que, pour tout  $n$ ,  $u_n = 2^{n+1} + n + 1$ .
- c) En déduire la limite de  $(u_n)$ .