

Plaquette 5 – Rédiger une démonstration : choisir sa méthode

Logique et raisonnement — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Avant d'écrire, on identifie la **forme** de l'énoncé et on choisit la méthode : une implication dont la conclusion est une négation (« n'est pas rationnel », « il n'existe pas ») appelle souvent l'**absurde** ; une implication dont l'hypothèse est difficile à exploiter appelle la **contraposée** ; « trouver toutes les solutions » ou « montrer qu'il existe une unique décomposition » appelle l'**analyse-synthèse** ; une propriété d'entiers ou de valeurs absolues appelle une **disjonction de cas**. La rédaction annonce la méthode dès la première ligne et conclut explicitement.

Exercice 1 – Racine de 3

- a) Montrer que si n^2 est divisible par 3, alors n est divisible par 3.
- b) En déduire que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Exercice 2 – Une infinité de nombres premiers

Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers (preuve d'Euclide).

Exercice 3 – Un logarithme irrationnel

Démontrer que $\log_{10} 2$ est irrationnel.

Exercice 4 – Somme de deux rationnels

Soient a et b deux réels. Montrer que si $a + b$ est irrationnel, alors a ou b est irrationnel.

Exercice 5 – Une contraposée algébrique

Soient x, y réels. Montrer que si $x \neq y$, alors $(x + 1)(y - 1) \neq (x - 1)(y + 1)$.

Exercice 6 – Pair plus impair

Démontrer par **analyse-synthèse** que toute fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique $f = g + h$, avec g paire et h impaire.

Exercice 7 – Une équation fonctionnelle

Trouver toutes les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x et y ,
 $f(x + y) = f(x) + y$.

Exercice 8 - Carrés modulo 4

- a) Montrer que le carré d'un entier est de la forme $4k$ ou $4k + 1$.
- b) En déduire qu'un entier de la forme $4m + 3$ n'est jamais la somme de deux carrés.

Exercice 9 - Somme de valeurs absolues

Montrer que, pour tout réel x , $|x - 1| + |x + 1| \geq 2$, et déterminer quand il y a égalité.

Exercice 10 - Le principe des tiroirs

On place 5 points dans un carré de côté 2. Montrer que deux d'entre eux sont à une distance au plus $\sqrt{2}$.

Exercice 11 - Réfuter par un contre-exemple

Les énoncés suivants sont-ils vrais ?

- a) La somme de deux irrationnels est irrationnelle.
- b) Le produit de deux irrationnels est irrationnel.
- c) Pour tout réel x , $\sqrt{x^2} = x$.

Exercice 12 - Pas de plus petit réel strictement positif

Démontrer qu'il n'existe pas de plus petit réel strictement positif. Le résultat reste-t-il vrai dans $\mathbb{N}^*$?

Exercice 13 - Moyenne arithmétique et géométrique

Soient $a, b \geq 0$. Montrer que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, et déterminer le cas d'égalité.

Exercice 14 - Une équivalence sur les entiers

Démontrer que, pour $n \in \mathbb{Z}$: n est impair si et seulement si $n^2 - 1$ est divisible par 8.

Exercice 15 - Synthèse : choisir sa méthode

Démontrer les quatre énoncés, en annonçant d'abord la méthode choisie.

- a) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n^3 - n$ est divisible par 3.
- b) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel (on admet que $\sqrt{6}$ l'est).
- c) Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, si ab est impair, alors a et b sont impairs.
- d) Il existe un réel x tel que $x^3 = x + 6$.