

Plaquette 2 - Logique propositionnelle : tables de vérité et équivalences

Logique et raisonnement — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Une **proposition** est vraie (V) ou fausse (F). Les **connecteurs** (non, et, ou, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$) en fabriquent de nouvelles, dont la valeur de vérité se lit dans une **table de vérité** : une ligne par combinaison des variables (2^n lignes pour n variables). Deux propositions sont **équivalentes** si leurs colonnes coïncident ; une **tautologie** est vraie sur toutes les lignes. Au-delà de trois variables, on raisonne plutôt par équivalences successives (De Morgan, distributivité, $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \text{non}P \text{ ou } Q$) ou en cherchant l'unique cas qui rendrait l'énoncé faux.

Exercice 1 - Tiers exclu et contradiction

Dresser la table de vérité de « P ou $\text{non}P$ » et de « P et $\text{non}P$ ». Conclure.

Exercice 2 - Les lois de De Morgan

Démontrer à l'aide d'une table de vérité que $\text{non}(P \text{ et } Q)$ et $\text{non}P \text{ ou } \text{non}Q$ sont équivalentes. En déduire, sans table, la seconde loi de De Morgan.

Exercice 3 - Distributivité

Montrer que $P \text{ et } (Q \text{ ou } R)$ est équivalente à $(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$.

Exercice 4 - Une simplification

Montrer que « $(P \Rightarrow Q) \text{ et } (P \Rightarrow \text{non}Q)$ » est équivalente à $\text{non}P$. Interpréter.

Exercice 5 - Transitivité de l'implication

Montrer que $((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ est une tautologie, sans dresser la table à 8 lignes.

Exercice 6 - Le ou exclusif

On définit « P ou exclusif Q », noté $P \oplus Q$, vraie si exactement une des deux propositions est vraie.

- a) Dresser sa table.
- b) Montrer que $P \oplus Q \Leftrightarrow (P \text{ et } \text{non}Q) \text{ ou } (\text{non}P \text{ et } Q)$.
- c) Montrer que $P \oplus Q \Leftrightarrow \text{non}(P \Leftrightarrow Q)$.

Exercice 7 - Ni l'un ni l'autre

Traduire avec des connecteurs, puis écrire la négation :

- a) « x n'est ni positif ni entier. »

- b) « Il pleut mais il ne fait pas froid. »
- c) « Je viens seulement s'il fait beau. »

Exercice 8 - La négation d'une promesse

Un élève affirme : « S'il pleut, je prends mon parapluie. » Parmi les phrases suivantes, laquelle est la négation de cette affirmation ?

- a) « S'il pleut, je ne prends pas mon parapluie. »
- b) « S'il ne pleut pas, je prends mon parapluie. »
- c) « Il pleut et je ne prends pas mon parapluie. »
- d) « Il ne pleut pas et je prends mon parapluie. »

Exercice 9 - Chevaliers et fripons

Sur une île, les chevaliers disent toujours la vérité et les fripons mentent toujours. Arthur dit : « Bruno est un fripon. » Bruno dit : « Arthur et moi sommes de la même espèce. » Que sont Arthur et Bruno ?

Exercice 10 - Une tautologie

Montrer que $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P)$ est une tautologie. Sa réciproque en est-elle une ?

Exercice 11 - Implication ou équivalence ?

Pour x réel, placer le bon symbole ($\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$) entre les propositions :

- a) $x^2 = x \dots x \in \{0; 1\}$
- b) $x^2 = 4 \dots x = 2$
- c) $x > 1 \dots x^2 > 1$
- d) $|x| < 1 \dots -1 < x < 1$

Exercice 12 - Contraposée d'un théorème

Écrire la contraposée des théorèmes suivants et en donner une utilisation.

- a) « Si f est dérivable en a , alors f est continue en a . »
- b) « Si une suite réelle converge, alors elle est bornée. »

Exercice 13 - Une chaîne d'équivalences

Pour $n \in \mathbb{Z}$, démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes : (i) n est pair ; (ii) n^2 est pair ; (iii) n^3 est pair. On organisera la preuve en « cycle » $(i) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$.

Exercice 14 - Négation d'une équivalence

Écrire la négation de $P \Leftrightarrow Q$ sans utiliser le symbole « non » devant une parenthèse. Application : nier « x est positif si et seulement si $x^2 = x$ ».

Exercice 15 – Synthèse : simplifier une expression

Simplifier $E = \text{non}(P \Rightarrow (Q \text{ et } R))$, puis $F = (P \text{ ou } Q)$ et $\text{non}P$. Vérifier la seconde par une table de vérité.