

Logique et raisonnement – L1

Fiche de révision essentielle – connecteurs, quantificateurs, négations et preuves

1. Connecteurs logiques

Pour des propositions A, B :

$$\neg A, \quad A \wedge B, \quad A \vee B, \quad A \Rightarrow B, \quad A \Leftrightarrow B.$$

Le « ou » mathématique est **inclusif**. Une implication est fausse seulement lorsque A est vraie et B fausse.

A	B	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B,$$

$$A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A).$$

Si $A \Rightarrow B$, A est **suffisante** pour B et B est **nécessaire** pour A .

Négations utiles

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B, \quad \neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B.$$

$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B.$$

Piège : Contraposée : $\neg B \Rightarrow \neg A$. **Réciproque** : $B \Rightarrow A$. Ne pas les confondre.

2. Quantificateurs

$$\forall x \in E, P(x) \quad : \text{pour tout } x,$$

$$\exists x \in E, P(x) \quad : \text{il existe au moins un } x.$$

$\exists!x$ signifie « il existe un unique x ».

Négation

$$\neg(\forall x \in E, P(x)) \Leftrightarrow \exists x \in E, \neg P(x),$$

$$\neg(\exists x \in E, P(x)) \Leftrightarrow \forall x \in E, \neg P(x).$$

Avec plusieurs quantificateurs, on les inverse **dans le même ordre** :

$$\neg(\forall x \exists y P(x, y)) \Leftrightarrow \exists x \forall y \neg P(x, y).$$

Ordre des quantificateurs

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x$$

est vraie (prendre $y = x + 1$), alors que

$$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y > x$$

est fausse.

Piège : $\forall x \exists y$ autorise y à dépendre de x ; $\exists y \forall x$ impose le même y pour tous les x .

3. Modes de raisonnement

Direct

Pour $A \Rightarrow B$: supposer A , dérouler des implications valides, conclure B .

Contraposée

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A.$$

Ex. n^2 pair $\Rightarrow n$ pair : montrer « n impair $\Rightarrow n^2$ impair ».

Absurde

Pour prouver P , supposer $\neg P$, obtenir une contradiction, conclure P .

Disjonction de cas

Découper en cas **exhaustifs** (pair/impair, $x \geq 0/x < 0$), puis prouver l'objectif dans chacun.

Contre-exemple

Pour réfuter $\forall x \in E, P(x)$, trouver $x_0 \in E$ tel que $P(x_0)$ soit fausse.

Analyse-synthèse

Analyse : déduire des conditions nécessaires et obtenir des candidats.

Synthèse : vérifier les candidats dans l'énoncé initial.

4. Récurrences

Récurrence simple

Pour prouver $P(n)$ pour tout $n \geq n_0$:

1. **Initialisation** : vérifier $P(n_0)$.
2. **Hérédité** : fixer $n \geq n_0$, supposer $P(n)$, prouver $P(n+1)$.
3. **Conclusion** : par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exemple-type :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Récurrence double

Deux bases puis

$$P(n) \wedge P(n+1) \Rightarrow P(n+2).$$

Adaptée aux suites définies à partir de deux termes précédents.

Récurrence forte

Dans l'hérédité, on suppose

$$P(n_0), P(n_0+1), \dots, P(n)$$

pour montrer $P(n+1)$.

Piège : Une récurrence sans initialisation n'est pas une preuve.

5. Exemple L1 : négation d'une limite

Convergence de (u_n) vers ℓ :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Sa négation est

$$\boxed{\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - \ell| \geq \varepsilon.}$$

6. Réflexes de rédaction

- Préciser le **domaine** des variables.
- Distinguer $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$.
- Pour $A \Leftrightarrow B$, prouver les **deux sens**.
- Après une étape non réversible (ex. mise au carré), faire une **synthèse**.
- Ne jamais prouver un « pour tout » par quelques exemples.
- Un seul contre-exemple suffit à réfuter un énoncé universel.

— Conclure explicitement la preuve.

7. Quel raisonnement choisir ?

Situation	Réflexe
$A \Rightarrow B$	Direct ou contraposée
Impossibilité	Absurde
Parité / signe	Cas
« Pour tout » douteux	Contre-exemple
Toutes les solutions	Analyse-synthèse
Propriété en n	Récurrence
$A \Leftrightarrow B$	Deux implications

8. Pièges express

- $\neg(A \Rightarrow B) \neq (\neg A \Rightarrow \neg B)$.
- $A \Rightarrow B$ n'implique pas $B \Rightarrow A$.
- $\sqrt{x^2} = |x|$, pas toujours x .
- $\forall x \exists y$ n'est pas $\exists y \forall x$.
- Élever au carré peut créer des solutions parasites.

9. Auto-test en 60 secondes

Savoir répondre immédiatement :

1. Nier $\forall x \in E, P(x)$.
2. Donner la contraposée de $A \Rightarrow B$.
3. Expliquer pourquoi $\forall x \exists y$ et $\exists y \forall x$ diffèrent.
4. Citer les trois étapes d'une récurrence simple.
5. Expliquer le rôle de la synthèse après une transformation non réversible.

10. Traductions à connaître

- « P si Q » : $Q \Rightarrow P$.
- « P seulement si Q » : $P \Rightarrow Q$.
- « P si et seulement si Q » : $P \Leftrightarrow Q$.
- « Aucun $x \in E$ ne vérifie P » : $\forall x \in E, \neg P(x)$, soit encore $\neg \exists x \in E, P(x)$.
- « Il existe un unique x vérifiant P » : existence + unicité.

11. Exemples éclair

- Contre-exemple à $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x$: prendre $x = -1$.
- Cas : $n(n+1)$ est pair car n ou $n+1$ est pair.
- Analyse-synthèse : $x^2 = x \Rightarrow x \in \{0, 1\}$, puis les deux valeurs sont vérifiées.

Mémo final : quantifier proprement, nier en échangeant $\forall/\exists$, identifier la forme logique de l'objectif, choisir la méthode adaptée, puis rédiger une chaîne d'arguments où chaque étape est justifiée.