

Logique et raisonnement en L1 maths

Connecteurs, quantificateurs, négation et méthodes de démonstration

Cours de Licence 1 – rédaction mathématique, preuves et pièges fondamentaux

Objectifs du chapitre

À la fin de ce cours, on doit savoir traduire une phrase en langage logique, lire et nier correctement une proposition quantifiée, distinguer implication et équivalence, choisir un mode de raisonnement adapté et rédiger une démonstration courte mais complète.

1. Propositions et langage mathématique

Une **proposition** est un énoncé auquel on peut attribuer une valeur de vérité : *vrai* ou *faux*. Une phrase contenant une variable libre, comme « $x^2 \geq 0$ », ne devient une proposition que lorsque l'on précise le domaine de x et/ou qu'on la quantifie.

Exemple. « $2 + 3 = 5$ » est vraie. « 7 est pair » est fausse. « $x + 1 > 0$ » n'a pas de valeur de vérité tant que x n'est pas fixé ou quantifié.

En mathématiques, la précision du domaine est essentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq 0$$

est vraie, alors que « tout nombre possède un inverse multiplicatif » est fausse dans $\mathbb{R}$ à cause de 0.

1.1. Connecteurs logiques

Soient A et B deux propositions.

Connecteur	Notation	Lecture / sens
Négation	$\neg A$	« non A » : vraie exactement lorsque A est fausse.
Conjonction	$A \wedge B$	« A et B » : les deux doivent être vraies.
Disjonction	$A \vee B$	« A ou B » : au moins l'une est vraie ; le « ou » est inclusif.
Implication	$A \Rightarrow B$	« si A , alors B ». Elle est fausse uniquement lorsque A est vraie et B fausse.
Équivalence	$A \Leftrightarrow B$	A et B ont la même valeur de vérité ; équivaut à $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

1.2. Tables de vérité

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Le point souvent surprenant est la troisième et la quatrième ligne de l'implication : si A est fausse, alors $A \Rightarrow B$ est vraie, quelle que soit la valeur de B . Formellement,

$$A \Rightarrow B \quad \Longleftrightarrow \quad \neg A \vee B.$$

Piège classique. Une implication $A \Rightarrow B$ ne signifie pas que A est vraie, ni que B est vraie. Elle décrit seulement un lien logique entre les deux propositions.

1.3. Conditions nécessaires et suffisantes

Si $A \Rightarrow B$, alors :

- A est une **condition suffisante** pour B ;
- B est une **condition nécessaire** pour A .

Si $A \Leftrightarrow B$, chacune est à la fois nécessaire et suffisante pour l'autre.

Exemple. Pour $x \in \mathbb{R}$, $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$. Donc $x = 2$ est suffisant pour avoir $x^2 = 4$. En revanche, $x^2 = 4$ n'impose pas $x = 2$ car $x = -2$ convient aussi.

2. Négation et lois logiques

Savoir nier une phrase est une compétence centrale : une preuve par l'absurde, un contre-exemple ou la négation d'une définition en dépend directement.

2.1. Lois de De Morgan

$$\neg(A \wedge B) \iff (\neg A) \vee (\neg B), \quad \neg(A \vee B) \iff (\neg A) \wedge (\neg B).$$

Pour une implication :

$$\boxed{\neg(A \Rightarrow B) \iff A \wedge \neg B.}$$

Autrement dit, pour rendre « si A , alors B » fausse, il faut que l'hypothèse A soit vraie et la conclusion B fausse.

Exemple. La négation de « si n est multiple de 4, alors n est pair » est « n est multiple de 4 et n n'est pas pair ».

2.2. Équivalence et double implication

Prouver $A \Leftrightarrow B$ signifie prouver séparément

$$A \Rightarrow B \quad \text{et} \quad B \Rightarrow A.$$

Dans une rédaction, on peut annoncer clairement : « Sens direct » puis « Réciproque ».

Piège classique. La réciproque de $A \Rightarrow B$ est $B \Rightarrow A$. Elle n'est pas automatiquement vraie. La contraposée, elle, est logiquement équivalente à l'implication d'origine.

3. Quantificateurs $\forall$ et $\exists$

Quantificateur universel

$\forall x \in E$, $P(x)$ signifie : « pour tout x appartenant à E , la propriété $P(x)$ est vraie ».

Quantificateur existentiel

$\exists x \in E$, $P(x)$ signifie : « il existe au moins un x appartenant à E tel que $P(x)$ soit vraie ».

On peut aussi rencontrer $\exists! x \in E$, qui signifie « il existe un unique $x \in E$ ».

3.1. L'ordre des quantificateurs change le sens

Comparer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x$$

et

$$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y > x.$$

La première proposition est vraie : pour chaque x , on peut choisir par exemple $y = x + 1$. La seconde est fausse : il n'existe pas de réel plus grand que tous les réels.

Piège classique. On ne peut pas, en général, permuter $\forall$ et $\exists$. « Pour tout x , il existe un y » autorise y à dépendre de x . « Il existe un y tel que pour tout x » impose le même y pour tous les x .

3.2. Négation d'une proposition quantifiée

Les règles fondamentales sont :

$$\neg(\forall x \in E, P(x)) \iff \exists x \in E, \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x \in E, P(x)) \iff \forall x \in E, \neg P(x)$$

La négation échange donc $\forall$ et $\exists$, puis nie la propriété intérieure.

Exemple. La négation de $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ est $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$.

Exemple. La négation de $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 = 2$ est $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \neq 2$.

3.3. Exemple L1 : quantificateurs imbriqués

Une formulation classique de la convergence d'une suite (u_n) vers ℓ est

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Sa négation s'obtient mécaniquement :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - \ell| \geq \varepsilon.$$

Cette transformation illustre pourquoi l'ordre des quantificateurs doit être conservé et inversé un par un lors de la négation.

4. Architecture d'une démonstration

Une preuve lisible sépare clairement **hypothèses**, **objectif** et **enchaînement logique**. On évite les calculs sans phrase lorsqu'ils masquent le raisonnement.

Schéma minimal

1. Identifier ce qui est supposé.
2. Identifier exactement ce qui doit être montré.
3. Choisir une méthode.
4. Justifier chaque étape utile.
5. Conclure explicitement.

4.1. Raisonnement direct

Pour démontrer $A \Rightarrow B$, on suppose A vraie puis on déduit B .

Exemple. Montrons que si n est pair, alors n^2 est pair. Si n est pair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. Alors $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$, donc n^2 est pair.

5. Raisonnement par contraposée

La proposition

$$A \Rightarrow B$$

est équivalente à sa contraposée

$$\boxed{\neg B \Rightarrow \neg A.}$$

La contraposée est utile lorsque $\neg B$ fournit une information plus exploitable que A .

Méthode

Pour prouver $A \Rightarrow B$ par contraposée, annoncer que l'on montre $\neg B \Rightarrow \neg A$, supposer $\neg B$, puis établir $\neg A$.

Exemple. Montrons que, pour $n \in \mathbb{Z}$, si n^2 est pair alors n est pair. La contraposée est : si n est impair, alors n^2 est impair. Si $n = 2k + 1$, alors

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

donc n^2 est impair. La contraposée est vraie, donc l'implication initiale est vraie.

Piège classique. Ne pas confondre contraposée $\neg B \Rightarrow \neg A$ et réciproque $B \Rightarrow A$. Seule la contraposée est automatiquement équivalente à $A \Rightarrow B$.

6. Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer une proposition P , on suppose sa négation $\neg P$ et on montre que cette hypothèse conduit à une contradiction : une impossibilité logique ou mathématique.

Structure type

Supposons, par l'absurde, que $\neg P$. À partir de cette hypothèse et de faits établis, on obtient une contradiction. Donc $\neg P$ est impossible, et par conséquent P est vraie.

6.1. Exemple : l'irrationalité de $\sqrt{2}$

Supposons $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. On peut écrire

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}^*, \quad \gcd(p, q) = 1.$$

Alors $p^2 = 2q^2$, donc p^2 est pair, donc p est pair : $p = 2k$. Ainsi

$$4k^2 = 2q^2 \implies q^2 = 2k^2,$$

donc q est pair. Les entiers p et q sont tous deux pairs, contradiction avec $\gcd(p, q) = 1$. Ainsi $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

7. Disjonction de cas

On découpe le problème en cas qui couvrent toutes les possibilités. Si l'objectif est obtenu dans chaque cas, il est établi globalement.

Exemple. Pour montrer que $n(n + 1)$ est pair pour tout $n \in \mathbb{Z}$: soit n est pair, et alors le produit est pair ; soit n est impair, alors $n + 1$ est pair, donc le produit est pair. Les deux cas couvrent tous les entiers.

Piège classique. Les cas doivent être exhaustifs. Si l'on oublie une possibilité, la preuve est incomplète.

8. Contre-exemple

Une proposition universelle de la forme $\forall x \in E, P(x)$ est fausse dès qu'on exhibe un seul élément $x_0 \in E$ tel que $P(x_0)$ soit fausse.

Principe

Pour réfuter une affirmation universelle, il suffit d'un contre-exemple correctement choisi et vérifié. Un calcul sur plusieurs exemples ne prouve jamais une propriété universelle.

Exemple. L'affirmation « pour tout $x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x$ » est fausse : avec $x = -1$, on obtient $\sqrt{(-1)^2} = 1 \neq -1$. La formule correcte est $\sqrt{x^2} = |x|$.

9. Analyse-synthèse

L'analyse-synthèse est particulièrement utile pour déterminer toutes les solutions d'un problème.

- **Analyse** : on suppose qu'un objet est solution et on déduit des conditions nécessaires. Cette phase produit des candidats.
- **Synthèse** : on vérifie lesquels de ces candidats satisfont réellement toutes les conditions initiales.

9.1. Exemple : résoudre $\sqrt{x+2} = x$ dans $\mathbb{R}$

Analyse. Si x est solution, alors nécessairement $x \geq 0$. En élevant au carré,

$$x + 2 = x^2 \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff (x - 2)(x + 1) = 0.$$

Les seuls candidats sont $x = 2$ et $x = -1$. Comme une solution doit vérifier $x \geq 0$, il reste $x = 2$.

Synthèse. Pour $x = 2$, $\sqrt{2+2} = 2$. Donc l'ensemble des solutions est $\{2\}$.

Piège classique. Une manipulation non réversible, comme élever au carré, peut créer des solutions parasites. La synthèse est indispensable.

10. Raisonnement par récurrence

La récurrence sert à démontrer une propriété $P(n)$ pour tous les entiers n à partir d'un rang initial n_0 .

10.1. Récurrence simple

Schéma

Initialisation : vérifier $P(n_0)$.

Hérédité : fixer $n \geq n_0$ et supposer $P(n)$ vraie. Démontrer alors $P(n+1)$.

Conclusion : par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

10.2. Exemple : somme des premiers entiers

Montrons que, pour tout $n \geq 1$,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Initialisation : pour $n = 1$, $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$.

Hérédité : supposons

$$1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Alors

$$1 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : la formule est vraie pour tout $n \geq 1$.

Piège classique. L'hypothèse de récurrence n'est pas une propriété « déjà prouvée pour tout n ». On fixe un entier arbitraire n et on suppose seulement $P(n)$ pour démontrer $P(n+1)$.

10.3. Récurrence double

Elle est adaptée lorsque l'étape $n+2$ dépend des deux rangs précédents.

Schéma

Vérifier deux initialisations $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$, puis montrer

$$P(n) \wedge P(n+1) \Rightarrow P(n+2).$$

On conclut alors que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exemple. Pour la suite de Fibonacci $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, on peut montrer $F_n \leq 2^n$. Les cas $n = 0, 1$ sont immédiats. Si $F_n \leq 2^n$ et $F_{n+1} \leq 2^{n+1}$, alors

$$F_{n+2} \leq 2^n + 2^{n+1} = 3 \cdot 2^n \leq 4 \cdot 2^n = 2^{n+2}.$$

10.4. Récurrence forte

Dans l'hérédité, on suppose vraies *toutes* les propriétés précédentes :

$$P(n_0), P(n_0+1), \dots, P(n),$$

puis on démontre $P(n+1)$.

Exemple. Tout entier $n \geq 2$ est produit de nombres premiers. Si $n+1$ est premier, c'est immédiat. Sinon, $n+1 = ab$ avec $2 \leq a, b \leq n$. Par hypothèse de récurrence forte, a et b sont produits de nombres premiers, donc $n+1$ aussi.

11. Choisir le bon mode de raisonnement

Situation	Réflexe utile
Implication $A \Rightarrow B$	Essayer d'abord le direct ; sinon la contraposée si $\neg B$ est plus exploitable.
Impossibilité / irrationalité / unicité	L'absurde est souvent naturel.
Entiers, signe, valeur absolue, parité	Disjonction de cas.
Affirmation pour tout « suspecte »	Chercher un contre-exemple.
Détermination de toutes les solutions	Analyse-synthèse.
Propriété indexée par $n \in \mathbb{N}$	Récurrence simple, double ou forte selon la dépendance.
Équivalence $A \Leftrightarrow B$	Prouver les deux sens séparément.

12. Erreurs fréquentes en L1

1. **Prouver par des exemples.** Vérifier $P(1), P(2), P(3)$ ne prouve pas $\forall n, P(n)$.
2. **Intervertir les quantificateurs.** $\forall x \exists y$ et $\exists y \forall x$ ont des sens différents.
3. **Mal nier une implication.** La négation de $A \Rightarrow B$ est $A \wedge \neg B$, pas $\neg A \Rightarrow \neg B$.
4. **Confondre réciproque et contraposée.** $B \Rightarrow A$ n'est pas équivalente à $A \Rightarrow B$ en général.
5. **Oublier le domaine.** « $1/x$ existe » dépend du fait que $x \neq 0$.
6. **Utiliser une équivalence quand on n'a qu'une implication.** Une transformation non réversible doit être marquée par $\Rightarrow$, puis vérifiée en synthèse si nécessaire.
7. **Oublier une initialisation en récurrence.** Sans base, l'hérédité seule ne suffit pas.

13. Exercices d'entraînement

1. Écrire la négation de : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0$.
2. Dire si $A \Rightarrow B$ est vraie lorsque A est fausse et B vraie.
3. Nier : « Il existe un réel x tel que $x^2 < 0$. »
4. Montrer par contraposée : si n^2 est impair, alors n est impair.
5. Réfuter par contre-exemple : « si $ab = 0$, alors $a = b = 0$ » dans $\mathbb{R}$.

6. Prouver par disjonction de cas que $|x| \geq 0$ pour tout réel x .
7. Résoudre par analyse-synthèse $x^2 = x$ dans $\mathbb{R}$.
8. Montrer par récurrence que $2^n \geq n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
9. Comparer le sens de $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = x^2$ et $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y = x^2$.
10. Écrire la négation de $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$.

14. Corrections synthétiques

1. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \neq 0$.
2. Vraie : une implication dont l'hypothèse est fausse est vraie.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.
4. Contraposée de l'énoncé : si n est pair, alors n^2 est pair, déjà démontré directement.
5. $a = 1, b = 0$: on a $ab = 0$ sans avoir $a = b = 0$.
6. Si $x \geq 0, |x| = x \geq 0$. Si $x < 0, |x| = -x > 0$.
7. $x^2 = x \Leftrightarrow x(x - 1) = 0$, donc $x \in \{0, 1\}$; les deux valeurs conviennent.
8. Initialisation : $2^0 = 1 \geq 1$. Si $2^n \geq n + 1$, alors $2^{n+1} \geq 2n + 2 \geq n + 2$ pour $n \geq 0$.
9. La première est vraie avec $y = x^2$ dépendant de x . La seconde est fausse car aucune constante y n'est égale à x^2 pour tout réel x .
10. $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - \ell| \geq \varepsilon$.

À retenir

Les réflexes essentiels

Une phrase mathématique commence par un domaine et des quantificateurs clairs. Une négation échange $\forall$ et $\exists$. Une implication se prouve directement ou par contraposée ; une équivalence exige deux sens. Un énoncé universel se réfute par un seul contre-exemple. Une récurrence exige initialisation, hérédité et conclusion. Enfin, la qualité d'une preuve tient autant à sa structure logique qu'aux calculs qu'elle contient.