

Plaquette 3 - Équations polynomiales
dans $\mathbb{C}$: méthodes et relations
Nombres complexes — Licence 1 (L1)
 Corrections détaillées

Boîte à outils

Second degré $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$, coefficients complexes) : $\Delta = b^2 - 4ac$; si $\delta^2 = \Delta$,

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}, \quad z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

- **Racine carrée** de $\Delta = p + iq$: $\delta = x + iy$ avec $x^2 - y^2 = p$, $x^2 + y^2 = |\Delta|$, $2xy = q$ (signe de xy).
- **Racine multiple** : α est racine d'ordre ≥ 2 de P si et seulement si $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$.
- **Coefficients réels** : si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $P(\alpha) = 0$, alors $P(\bar{\alpha}) = 0$; dans $\mathbb{R}[X]$, $(X - \alpha)(X - \bar{\alpha}) = X^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2$.

Relations coefficients-racines pour $X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ de racines x_1, x_2, x_3 :

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -a_2, \quad \sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a_1, \quad \sigma_3 = x_1x_2x_3 = -a_0$$

- $\sum x_i^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$; $\sum \frac{1}{x_i} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}$ si $\sigma_3 \neq 0$.
- **Racines n -ièmes** de $z_0 = re^{i\theta}$: $r^{1/n} e^{i(\theta + 2k\pi)/n}$, $0 \leq k \leq n-1$.
- **Filtre des racines de l'unité** : $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$ vaut n si n divise p , et 0 sinon.

Correction de l'exercice 1 - Discriminant complexe

a) Avec $a = 1$, $b = -(3 + 2i)$ et $c = 5 + 5i$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3 + 2i)^2 - 4(5 + 5i)$$

- $(3 + 2i)^2 = 9 + 12i + 4i^2 = 5 + 12i$.
- $\Delta = 5 + 12i - 20 - 20i = -15 - 8i$.
- Δ n'est pas réel : on ne peut pas écrire « $\sqrt{\Delta}$ », il faut **chercher** un complexe δ tel que $\delta^2 = \Delta$.

b) On pose $\delta = x + iy$ (x, y réels). L'égalité $\delta^2 = \Delta$ et l'égalité des modules donnent trois équations :

$$x^2 - y^2 = -15, \quad x^2 + y^2 = |\Delta| = \sqrt{225 + 64} = 17, \quad 2xy = -8$$

- Somme des deux premières : $2x^2 = 2$, donc $x = \pm 1$; différence : $2y^2 = 32$, donc $y = \pm 4$.
- $2xy = -8 < 0$: x et y sont de **signes contraires**. D'où $\delta = 1 - 4i$ ou $\delta = -1 + 4i$.
- **Vérification** : $(1 - 4i)^2 = 1 - 8i - 16 = -15 - 8i$ ✓

c) Avec $\delta = 1 - 4i$ (l'autre racine carrée donne les mêmes solutions, dans l'autre ordre) :

$$z_{1,2} = \frac{3 + 2i \pm (1 - 4i)}{2}$$

- $z_1 = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i$ et $z_2 = \frac{2 + 6i}{2} = 1 + 3i$.
- **Somme** : $z_1 + z_2 = 3 + 2i = -\frac{b}{a}$ ✓

— **Produit** : $(2 - i)(1 + 3i) = 2 + 6i - i - 3i^2 = 5 + 5i = \frac{c}{a}$ ✓

— **Remarque** : les racines ne sont **pas conjuguées** ; ce n'est automatique que pour des coefficients réels.

Réponse. $\Delta = -15 - 8i = (1 - 4i)^2$; $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 1 + 3i$.

Correction de l'exercice 2 - Équation bicarrée

a) L'équation devient $Z^2 - 2Z + 4 = 0$, de discriminant $4 - 16 = -12 < 0$. Les racines sont complexes conjuguées :

$$Z = \frac{2 \pm i\sqrt{12}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3}$$

— $|1 + i\sqrt{3}| = 2$ et $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{i\pi/3}$; de même $1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\pi/3}$.

b) On cherche les racines carrées de $2e^{\pm i\pi/3}$: si $z = re^{i\theta}$ et $z^2 = 2e^{i\pi/3}$, alors $r^2 = 2$ et $2\theta \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

— $z^2 = 2e^{i\pi/3}$ donne $z = \pm\sqrt{2} e^{i\pi/6}$; $z^2 = 2e^{-i\pi/3}$ donne $z = \pm\sqrt{2} e^{-i\pi/6}$.

— Forme algébrique : $\sqrt{2} e^{i\pi/6} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

— Les quatre solutions sont $\pm\frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$ (les quatre combinaisons de signes).

— **Géométrie** : ce sont les sommets d'un **rectangle** centré en O , sur le cercle de rayon $\sqrt{2}$.

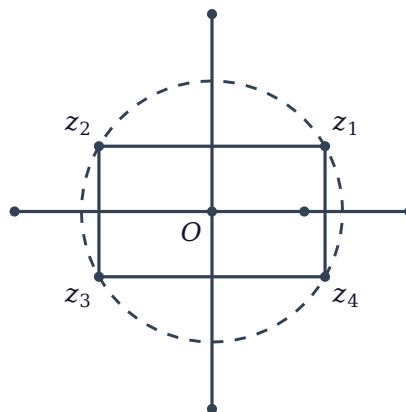
c) On regroupe les racines **conjuguées** : $\sqrt{2} e^{\pm i\pi/6}$ d'une part, $-\sqrt{2} e^{\pm i\pi/6}$ d'autre part. Avec la formule $(z - \alpha)(z - \bar{\alpha}) = z^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)z + |\alpha|^2$:

$$z^4 - 2z^2 + 4 = (z^2 - \sqrt{6}z + 2)(z^2 + \sqrt{6}z + 2)$$

— **Vérification** : le produit est de la forme $(A - B)(A + B)$ avec $A = z^2 + 2$ et $B = \sqrt{6}z$: $(z^2 + 2)^2 - 6z^2 = z^4 + 4z^2 + 4 - 6z^2 = z^4 - 2z^2 + 4$ ✓

— **Méthode directe** à retenir : écrire $z^4 - 2z^2 + 4 = (z^2 + 2)^2 - 6z^2$, différence de deux carrés.

Réponse. $z = \pm\sqrt{2} e^{\pm i\pi/6} = \pm\frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $z^4 - 2z^2 + 4 = (z^2 - \sqrt{6}z + 2)(z^2 + \sqrt{6}z + 2)$.



Les quatre solutions forment un rectangle inscrit dans le cercle de rayon $\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 3 - Racine imaginaire pure

a) On remplace z par iy , avec $(iy)^2 = -y^2$ et $(iy)^3 = -iy^3$:

$$P(iy) = -iy^3 + (2 + 2i)y^2 + (2 + 4i)iy - 4i$$

— $(2 + 4i)iy = 2iy - 4y$. On sépare parties réelle et imaginaire :

— **Partie réelle** : $2y^2 - 4y$; **partie imaginaire** : $-y^3 + 2y^2 + 2y - 4$.

— $P(iy) = 0$ exige que les **deux** soient nulles. La première donne $2y(y - 2) = 0$, soit $y = 0$ ou $y = 2$.

— On teste dans la seconde : $y = 0$ donne $-4 \neq 0$, rejeté ; $y = 2$ donne $-8 + 8 + 4 - 4 = 0$ ✓

— Donc $2i$ est racine de P (et c'est la **seule** racine imaginaire pure).

b) On développe $(z - 2i)(z^2 + az + b) = z^3 + (a - 2i)z^2 + (b - 2ia)z - 2ib$ et on identifie :

— terme constant : $-2ib = -4i$, donc $b = 2$;

— coefficient de z^2 : $a - 2i = -2 - 2i$, donc $a = -2$;

— **contrôle** sur le coefficient de z : $b - 2ia = 2 + 4i$ ✓

$$P(z) = (z - 2i)(z^2 - 2z + 2)$$

c) Le trinôme $z^2 - 2z + 2$ a pour discriminant $4 - 8 = -4 = (2i)^2$, d'où $z = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$.

— **Solutions** : $2i, 1 + i, 1 - i$.

— **Contrôle** par la somme des racines : $2i + 1 + i + 1 - i = 2 + 2i$, opposé du coefficient de z^2 ✓

— **Méthode** : « racine imaginaire pure » ou « racine réelle » se traduit toujours par un **système de deux équations réelles** ; on résout la plus simple et on teste dans l'autre.

Réponse. Racine $2i$; $P(z) = (z - 2i)(z^2 - 2z + 2)$; solutions $2i, 1 + i, 1 - i$.

Correction de l'exercice 4 - Relations coefficients-racines

a) P est unitaire, donc $P = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$. En développant et en identifiant :

$$P = X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3$$

— Donc $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 3$ et $\sigma_3 = 5$.

b) On développe $\sigma_1^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = \sum x_i^2 + 2\sigma_2$, d'où :

— $\sum x_i^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 4 - 6 = -2$.

— Les x_i sont non nuls car $\sigma_3 = 5 \neq 0$. En réduisant au même dénominateur :

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_2 x_3 + x_1 x_3 + x_1 x_2}{x_1 x_2 x_3} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} = \frac{3}{5}.$$

c) Chaque racine vérifie $x_i^3 = 2x_i^2 - 3x_i + 5$. On somme les trois égalités :

$$\sum x_i^3 = 2 \sum x_i^2 - 3 \sum x_i + 3 \times 5 = 2 \times (-2) - 3 \times 2 + 15 = 5$$

— **Contrôle** par l'identité $\sum x_i^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = 8 - 18 + 15 = 5$ ✓

— **Attention** : on a bien trois termes « +5 », d'où 3×5 ; oublier ce facteur est l'erreur classique.

d) Si les trois racines étaient réelles, la somme de leurs carrés serait **positive ou nulle**. Or elle vaut $-2 < 0$: contradiction.

— Donc au moins une racine n'est pas réelle ; comme P est à coefficients réels, sa conjuguée est aussi racine. P a donc **exactement une** racine réelle et deux racines

complexes conjuguées.

- La figure le confirme : une seule intersection, vers $x \approx 1,84$. Les deux autres racines valent environ $0,08 \pm 1,64i$ (calcul numérique).
- **Leçon** : les relations coefficients-racines donnent des informations **sans résoudre** l'équation.

Réponse. $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = 5$; $\sum x_i^2 = -2$, $\sum \frac{1}{x_i} = \frac{3}{5}$, $\sum x_i^3 = 5$; une seule racine réelle.

Correction de l'exercice 5 - Égalité de deux puissances n-ièmes

a) Par le binôme, $(z+1)^n - (z-1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k (1 - (-1)^{n-k})$. Le terme z^n ($k = n$) a pour coefficient $1 - 1 = 0$; le terme z^{n-1} a pour coefficient $\binom{n}{n-1} \times 2 = 2n \neq 0$.

- L'équation est donc polynomiale de **degré** $n - 1$: elle a au plus $n - 1$ solutions.
- Pour $z = 1$: $2^n = 0$ est faux, donc 1 n'est pas solution.

b) Puisque $z \neq 1$, on peut diviser par $(z-1)^n$:

$$(z+1)^n = (z-1)^n \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} = \omega^k, 0 \leq k \leq n-1$$

- Le cas $k = 0$ donnerait $z+1 = z-1$, impossible : il reste $1 \leq k \leq n-1$.

c) On isole z : $z+1 = \omega^k(z-1)$ donne $z(\omega^k - 1) = \omega^k + 1$, et $\omega^k \neq 1$ pour $1 \leq k \leq n-1$, d'où $z_k = \frac{\omega^k + 1}{\omega^k - 1}$.

- **Angle moitié** avec $\alpha = \frac{k\pi}{n}$ (donc $\omega^k = e^{2i\alpha}$) :

$$z_k = \frac{e^{i\alpha}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})}{e^{i\alpha}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})} = \frac{2 \cos \alpha}{2i \sin \alpha} = -i \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

- ($\sin \alpha \neq 0$ car $0 < \alpha < \pi$.) Les $n - 1$ valeurs sont **distinctes**, car la fonction cotangente est strictement décroissante sur $]0; \pi[$: ce sont **toutes** les solutions (degré $n - 1$), et elles sont imaginaires pures.
- **Argument géométrique** : $|z+1| = |z-1|$ (en passant au module) place z sur la médiatrice du segment joignant -1 et 1 , c'est-à-dire l'axe imaginaire ✓

d) Pour $n = 3$: $(z+1)^3 - (z-1)^3 = 6z^2 + 2$, donc $z^2 = -\frac{1}{3}$ et $z = \pm \frac{i}{\sqrt{3}}$.

- Formule : $k = 1$, $-i \frac{\cos(\pi/3)}{\sin(\pi/3)} = -\frac{i}{\sqrt{3}}$; $k = 2$, $-i \frac{\cos(2\pi/3)}{\sin(2\pi/3)} = \frac{i}{\sqrt{3}}$ ✓

Réponse. Degré $n - 1$; solutions $z_k = -i \frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)}$, $1 \leq k \leq n - 1$, toutes imaginaires pures ; pour $n = 3$: $\pm \frac{i}{\sqrt{3}}$.

Correction de l'exercice 6 - Racines neuvièmes primitives

a) Avec $u = z^3$: $(u-1)(u^2+u+1) = u^3 - 1 = z^9 - 1$ ✓ Les racines de Q sont donc des racines neuvièmes de l'unité, mais **pas** des racines cubiques.

b) $Z^2 + Z + 1 = 0$ a pour solutions $j = e^{2i\pi/3}$ et $j^2 = \bar{j} = e^{-2i\pi/3}$. On résout $z^3 = e^{\pm 2i\pi/3}$ par les racines cubiques :

$$z^3 = e^{2i\pi/3} \Leftrightarrow z = e^{i(\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3})}, k \in \{0, 1, 2\}$$

- On obtient les arguments $\frac{2\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \frac{14\pi}{9} \equiv -\frac{4\pi}{9}$.

— De même, $z^3 = e^{-2i\pi/3}$ donne les conjugués : $-\frac{2\pi}{9}, -\frac{8\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}$.

— **Bilan** : les six solutions sont $e^{\pm 2i\pi/9}, e^{\pm 4i\pi/9}, e^{\pm 8i\pi/9}$, c'est-à-dire les $e^{2ik\pi/9}$ avec k **premier avec 9** ($k = 1, 2, 4, 5, 7, 8$).

c) On regroupe chaque racine avec sa conjuguée, $(z - e^{i\theta})(z - e^{-i\theta}) = z^2 - 2\cos\theta z + 1$:

$$Q(z) = \left(z^2 - 2\cos\frac{2\pi}{9}z + 1\right)\left(z^2 - 2\cos\frac{4\pi}{9}z + 1\right)\left(z^2 - 2\cos\frac{8\pi}{9}z + 1\right)$$

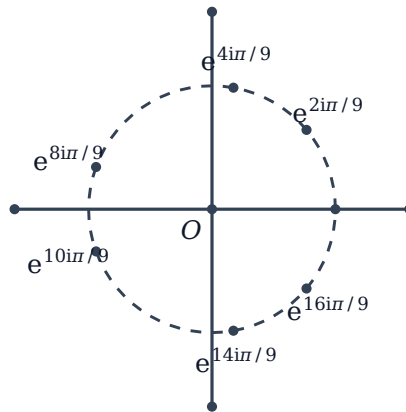
d) On compare le coefficient de z^5 : dans Q il est **nul** ; dans le produit, il vaut $-2\left(\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9}\right)$ (on prend z^2 dans deux facteurs et le terme en z dans le troisième).

— D'où $\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9} = 0$.

— **Autre lecture** : c'est la relation « somme des racines = 0 » pour Q , dont le coefficient de z^5 est nul ; la somme d'une racine et de sa conjuguée vaut $2\cos\theta$.

— **Contrôle numérique** : $0,76604 + 0,17365 - 0,93969 = 0,00000 \checkmark$

Réponse. Solutions $e^{\pm 2i\pi/9}, e^{\pm 4i\pi/9}, e^{\pm 8i\pi/9}$; $\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9} = 0$.



Les six racines de Q : les racines neuvièmes de l'unité qui ne sont pas racines cubiques.

Correction de l'exercice 7 - Racine double d'un trinôme cubique

a) α est racine d'ordre ≥ 2 si $(X - \alpha)^2$ divise P . Si $P = (X - \alpha)^2 Q$, alors $P' = 2(X - \alpha)Q + (X - \alpha)^2 Q'$ s'annule en α . Réciproquement, la formule de Taylor pour un polynôme de degré 3,

$$P(X) = P(\alpha) + P'(\alpha)(X - \alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2}(X - \alpha)^2 + \frac{P^{(3)}(\alpha)}{6}(X - \alpha)^3$$

montre que $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$ entraîne que $(X - \alpha)^2$ divise P .

b) On écrit le système $P(\alpha) = 0, P'(\alpha) = 0$:

— $P'(\alpha) = 3\alpha^2 + p = 0$ donne $\alpha^2 = -\frac{p}{3}$.

— $P(\alpha) = \alpha \cdot \alpha^2 + p\alpha + q = -\frac{p}{3}\alpha + p\alpha + q = \frac{2p}{3}\alpha + q = 0$, donc $\alpha = -\frac{3q}{2p}$ ($p \neq 0$).

— On reporte dans $\alpha^2 = -\frac{p}{3}$: $\frac{9q^2}{4p^2} = -\frac{p}{3}$, soit $27q^2 = -4p^3$, c'est-à-dire $4p^3 + 27q^2 = 0$.

— **Réciproque** : si $4p^3 + 27q^2 = 0$, on pose $\alpha = -\frac{3q}{2p}$; alors $\alpha^2 = \frac{9q^2}{4p^2} = -\frac{p}{3}$, donc

$P(\alpha) = 0$, puis $P(\alpha) = \alpha(\alpha^2 + p) + q = \frac{2p}{3}\alpha + q = 0$. Donc α est racine double.

c) Ici $p = -12$: la condition devient $4 \times (-1728) + 27q^2 = 0$, soit $q^2 = 256$ et $q = \pm 16$.

— $q = 16$: $\alpha = -\frac{48}{-24} = 2$. La somme des racines est nulle (pas de terme en X^2), donc la troisième vaut -4 : $P = (X - 2)^2(X + 4)$.

— **Vérification** : $(X^2 - 4X + 4)(X + 4) = X^3 - 12X + 16$ ✓

— $q = -16$: $\alpha = -2$ et $P = (X + 2)^2(X - 4)$.

d) $x \mapsto x^3 - 12x$ a un maximum local 16 en $x = -2$ et un minimum local -16 en $x = 2$ (dérivée $3x^2 - 12$). Ajouter $q = 16$ remonte la courbe de 16 : le minimum touche l'axe en $x = 2$, qui devient une racine **double** (tangence). Avec $q = -16$, c'est le maximum qui touche l'axe en $x = -2$.

— Pour $-16 < q < 16$, trois racines réelles distinctes ; pour $|q| > 16$, une seule racine réelle.

Réponse. Racine multiple $\Leftrightarrow 4p^3 + 27q^2 = 0$, $\alpha = -\frac{3q}{2p}$; $q = 16$: $(X - 2)^2(X + 4)$; $q = -16$: $(X + 2)^2(X - 4)$.

Correction de l'exercice 8 - Coefficients réels et racines conjuguées

a) Écrivons $P = \sum a_k X^k$ avec $a_k \in \mathbb{R}$. La conjugaison respecte sommes et produits, et $\overline{\overline{a_k}} = a_k$:

$$P(\overline{\alpha}) = \sum a_k \overline{\alpha}^k = \sum \overline{a_k \alpha^k} = \overline{P(\alpha)} = \overline{0} = 0$$

— L'hypothèse « coefficients réels » est **indispensable** : $z - i$ a pour racine i mais pas $-i$.

b) On calcule les puissances successives de $1 + i$:

— $(1 + i)^2 = 2i$, $(1 + i)^3 = 2i(1 + i) = -2 + 2i$, $(1 + i)^4 = (2i)^2 = -4$.

— $P(1 + i) = -4 - 2(-2 + 2i) + 6(2i) - 8(1 + i) + 8$.

— Parties réelles : $-4 + 4 - 8 + 8 = 0$; parties imaginaires : $-4 + 12 - 8 = 0$. Donc $P(1 + i) = 0$ ✓

— D'après a), $1 - i$ est aussi racine.

c) Le produit $(z - (1 + i))(z - (1 - i))$ est réel :

$$(z - \alpha)(z - \overline{\alpha}) = z^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)z + |\alpha|^2 = z^2 - 2z + 2$$

— On cherche $P = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + az + b)$: le terme constant donne $2b = 8$, soit $b = 4$; le coefficient de z^3 donne $a - 2 = -2$, soit $a = 0$.

— **Contrôle** sur z^2 : $b - 2a + 2 = 4 + 2 = 6$ ✓ ; sur z : $-2b + 2a = -8$ ✓

$$P = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + 4)$$

— Dans $\mathbb{R}[X]$, les deux facteurs sont **irréductibles** (discriminants -4 et -16 négatifs).

— Dans $\mathbb{C}[X]$: $P = (z - 1 - i)(z - 1 + i)(z - 2i)(z + 2i)$.

Réponse. $P = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + 4)$ dans $\mathbb{R}[X]$; racines $1 \pm i$ et $\pm 2i$.

Correction de l'exercice 9 - Racines cinquièmes d'un complexe

a) $|z_0| = \sqrt{256 + 768} = \sqrt{1024} = 32$, et $z_0 = 32 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 32 e^{2i\pi/3}$ (deuxième quadrant, cosinus $-\frac{1}{2}$).

b) On cherche $z = re^{i\theta}$ avec $r^5 e^{5i\theta} = 32 e^{2i\pi/3}$. Deux complexes non nuls sont égaux si et seulement si leurs modules sont égaux et leurs arguments congrus modulo 2π :

$$r^5 = 32 \quad \text{et} \quad 5\theta \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi] \Leftrightarrow r = 2 \quad \text{et} \quad \theta = \frac{2\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}$$

— Pour $k = 0, \dots, 4$: $\theta_k = \frac{2\pi}{15}, \frac{8\pi}{15}, \frac{14\pi}{15}, \frac{20\pi}{15}, \frac{26\pi}{15}$.

— Les solutions sont $w_k = 2 e^{i\theta_k}$: les sommets d'un **pentagone régulier** inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 2.

c) $\theta_3 = \frac{20\pi}{15} = \frac{4\pi}{3}$, angle remarquable :

— $w_3 = 2 e^{4i\pi/3} = 2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -1 - i\sqrt{3}$.

— **Vérification** : $w_3^5 = 32 e^{20i\pi/3} = 32 e^{2i\pi/3} e^{6i\pi} = z_0 \checkmark$

d) Les w_k sont les racines de $z^5 - z_0$, polynôme unitaire sans termes en $z^4, \dots, z$:

— **Somme** = $-(\text{coefficient de } z^4) = 0$ (aussi : $2e^{i\theta_0} \sum_k e^{2ik\pi/5} = 0$).

— **Produit** = $(-1)^5 \times (-z_0) = z_0 = -16 + 16\sqrt{3}i$.

— **Contrôle** : module du produit $2^5 = 32 = |z_0| \checkmark$; argument $\sum \theta_k = \frac{70\pi}{15} = \frac{14\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3} \checkmark$

Réponse. $z_0 = 32e^{2i\pi/3}$; $w_k = 2e^{i(2\pi/15 + 2k\pi/5)}$; $w_3 = -1 - i\sqrt{3}$; somme 0, produit z_0 .

Correction de l'exercice 10 - Méthode de Cardan

a) Par le binôme, $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v)$. Donc, avec $x = u + v$:

$$x^3 - 6x - 9 = u^3 + v^3 + (3uv - 6)(u + v) - 9$$

— Si $3uv = 6$, c'est-à-dire $uv = 2$, le terme en $(u + v)$ disparaît et l'équation devient $u^3 + v^3 = 9$.

— C'est l'idée de Cardan : **deux** inconnues pour une seule équation, ce qui laisse la liberté d'imposer une condition supplémentaire.

b) On connaît la somme $u^3 + v^3 = 9$ et le produit $u^3 v^3 = (uv)^3 = 8$: u^3 et v^3 sont les racines de

$$T^2 - 9T + 8 = 0$$

— $\Delta = 81 - 32 = 49$, racines $T = \frac{9 \pm 7}{2}$, soit 8 et 1.

— On prend $u^3 = 8$, $v^3 = 1$, et les racines cubiques réelles $u = 2$, $v = 1$ (on a bien $uv = 2$) : $x = 3$.

— **Vérification** : $27 - 18 - 9 = 0 \checkmark$

c) Les autres couples (u, v) avec $u^3 = 8$, $v^3 = 1$ et $uv = 2$ sont $(2j, j^2)$ et $(2j^2, j)$, car $j \cdot j^2 = j^3 = 1$.

— $x_2 = 2j + j^2$: avec $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $j^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

- $x_3 = 2j^2 + j = \overline{x_2} = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
- **Factorisation** : $x^3 - 6x - 9 = (x - 3)(x^2 + 3x + 3)$, car
 $(x - 3)(x^2 + 3x + 3) = x^3 + 3x^2 + 3x - 3x^2 - 9x - 9 \checkmark$ Le trinôme a pour discriminant
 $9 - 12 = -3$ et pour racines $\frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2}$, ce qui confirme x_2 et x_3 .
- **Pourquoi pas le couple** $(2j, 1)$? Son produit $2j$ n'est pas égal à 2 : la condition $uv = 2$ trie les neuf couples possibles et n'en garde que trois.

Réponse. $x = 3$, $x = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $x^3 - 6x - 9 = (x - 3)(x^2 + 3x + 3)$.

Correction de l'exercice 11 - Filtre des racines de l'unité

a) Si n divise p , chaque $\omega^{kp} = (\omega^n)^{kp/n} = 1$ et la somme vaut n . Sinon, $q = \omega^p \neq 1$ (car $\omega^p = 1 \Leftrightarrow n \mid p$) et $q^n = (\omega^n)^p = 1$, donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1 - q^n}{1 - q} = 0$$

b) On développe chaque terme par le binôme puis on échange les deux sommes finies :

$$\sum_{r=0}^2 (1 + j^r)^m = \sum_{r=0}^2 \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} j^{rk} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \left(\sum_{r=0}^2 j^{rk} \right)$$

— D'après a) avec $n = 3$, la somme intérieure vaut 3 si $3 \mid k$ et 0 sinon : seuls les coefficients $\binom{m}{3l}$ survivent, multipliés par 3.

c) On calcule $1 + j$ et $1 + j^2$ à l'aide de $1 + j + j^2 = 0$:

— $1 + j = -j^2 = e^{i\pi} e^{-2i\pi/3} = e^{i\pi/3}$, et $1 + j^2 = \overline{1 + j} = e^{-i\pi/3}$.

— Donc $(1 + j)^m + (1 + j^2)^m = e^{im\pi/3} + e^{-im\pi/3} = 2 \cos \frac{m\pi}{3}$.

$$\sum_{0 \leq 3l \leq m} \binom{m}{3l} = \frac{2^m + 2 \cos \frac{m\pi}{3}}{3}$$

d) Vérifications :

— $m = 3$: $\binom{3}{0} + \binom{3}{3} = 2$; formule $\frac{8 + 2 \cos \pi}{3} = \frac{6}{3} = 2 \checkmark$

— $m = 6$: $\binom{6}{0} + \binom{6}{3} + \binom{6}{6} = 1 + 20 + 1 = 22$; formule $\frac{64 + 2 \cos 2\pi}{3} = \frac{66}{3} = 22 \checkmark$

— **Interprétation** : parmi les 2^m parties d'un ensemble à m éléments, environ **un tiers** a un cardinal multiple de 3 ; l'écart au tiers exact est au plus $\frac{2}{3}$.

Réponse. $\sum_k \omega^{kp} = n$ si $n \mid p$, 0 sinon ; $\sum \binom{m}{3l} = \frac{2^m + 2 \cos(m\pi/3)}{3}$ (2 pour $m = 3$, 22 pour $m = 6$).

Correction de l'exercice 12 - Localiser les racines

a) Si $P(z) = 0$, alors $z^n = -(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0)$. Par l'**inégalité triangulaire** :

$$|z|^n \leq |a_{n-1}||z|^{n-1} + \dots + |a_1||z| + |a_0|$$

— Comme $|z| > 1$, chaque $|z|^k \leq |z|^{n-1}$ pour $0 \leq k \leq n-1$ (les puissances d'un réel > 1 croissent).

— Donc $|z|^n \leq (|a_{n-1}| + \dots + |a_0|)|z|^{n-1} = M|z|^{n-1}$.

b) Soit z une racine. Deux cas :

- si $|z| \leq 1$, alors $|z| \leq \max(1, M)$;
- si $|z| > 1$, on divise l'inégalité de a) par $|z|^{n-1} > 0$: $|z| \leq M \leq \max(1, M)$.
- Dans tous les cas $|z| \leq \max(1, M)$: **les racines sont dans un disque** dont le rayon se lit sur les coefficients.

c) Ici $a_2 = 0$, $a_1 = -2$, $a_0 = 1 + i$: $M = 0 + 2 + \sqrt{2} = 2 + \sqrt{2} \approx 3,41 > 1$. Toute racine vérifie $|z| \leq 2 + \sqrt{2}$.

d) Ici $M = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} < 1$, donc $\max(1, M) = 1$: toutes les racines vérifient $|z| \leq 1$.

- On peut le redire directement : si une racine vérifiait $|z| > 1$, a) donnerait $|z| \leq M = \frac{1}{2}$, contradiction.
- **Portée** : on ne sait pas calculer simplement les racines d'un polynôme de degré 4 quelconque, mais on sait les **localiser**. C'est le point de départ des méthodes numériques (on sait où chercher).
- **Piège** : la borne M seule est fautive si $M < 1$: pour $z^2 - \frac{1}{4}$, $M = \frac{1}{4}$ mais les racines sont $\pm \frac{1}{2}$, de module $> \frac{1}{4}$. D'où le $\max(1, M)$.

Réponse. Toute racine vérifie $|z| \leq \max(1, M)$; rayon $2 + \sqrt{2}$ en c) ; disque unité en d).

Correction de l'exercice 13 - Équations avec module et conjugué

Méthode commune : poser $z = x + iy$ (ou $z = re^{i\theta}$) et identifier parties réelle et imaginaire, car $|z|$ est **réel**.

a) Avec $z = x + iy$: $\sqrt{x^2 + y^2} + x + iy = 2 + i$.

- Parties imaginaires : $y = 1$. Parties réelles : $\sqrt{x^2 + 1} = 2 - x$.
- Il faut $2 - x \geq 0$; en élevant au carré : $x^2 + 1 = 4 - 4x + x^2$, donc $x = \frac{3}{4}$ (qui vérifie bien $x \leq 2$).
- **Solution** : $z = \frac{3}{4} + i$. **Vérification** : $|z| = \sqrt{\frac{9}{16} + 1} = \frac{5}{4}$ et $\frac{5}{4} + \frac{3}{4} = 2$ ✓
- La figure confirme l'unicité : la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} + x$ est strictement croissante et coupe une seule fois $y = 2$.

b) Forme exponentielle $z = re^{i\theta}$ ($z = 0$ ne convient pas) : $z|z| = r^2 e^{i\theta}$ et $-4i = 4e^{-i\pi/2}$.

$$r^2 = 4 \quad \text{et} \quad \theta \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

- Donc $r = 2$ et $z = 2e^{-i\pi/2} = -2i$: **une seule** solution, car $r > 0$ exclut $r = -2$.
- **Vérification** : $(-2i) \times 2 = -4i$ ✓

c) $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ et $|z|^2 = x^2 + y^2$, donc $z^2 + |z|^2 = 2x^2 + 2ixy$.

- Parties réelles : $2x^2 = 1$, $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Parties imaginaires : $2xy = 1$, $y = \frac{1}{2x} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ (même signe que x).
- **Solutions** : $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\pi/4}$ et $z = -e^{i\pi/4}$.
- **Vérification** : $e^{i\pi/2} + 1 = 1 + i$ ✓
- **Piège** : en a), oublier la condition $2 - x \geq 0$ avant d'élever au carré peut introduire des solutions parasites.

Réponse. a) $z = \frac{3}{4} + i$; b) $z = -2i$; c) $z = \pm e^{i\pi/4} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Correction de l'exercice 14 - Une équation en tangentes

a) On multiplie numérateur et dénominateur par $\cos \theta > 0$:

$$\frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta} = \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta}$$

b) Si $w = -1$: $1 + iz = -1 + iz$, soit $1 = -1$, impossible. On isole z :

$$- w(1 - iz) = 1 + iz \Leftrightarrow w - 1 = iz(1 + w) \Leftrightarrow z = \frac{w - 1}{i(w + 1)}.$$

— Si $w = e^{i\varphi}$ avec $\varphi \not\equiv \pi [2\pi]$, l'angle moitié donne $\frac{w - 1}{w + 1} = \frac{2i \sin(\varphi/2)}{2 \cos(\varphi/2)}$, donc $z = \tan \frac{\varphi}{2}$: un **réel**.

c) D'après a), le second membre vaut e^{2ia} . L'équation s'écrit $w^n = e^{2ia}$, dont les solutions sont les racines n -ièmes :

$$w = e^{i\varphi_k}, \quad \varphi_k = \frac{2a + 2k\pi}{n}, \quad 0 \leq k \leq n - 1$$

— La valeur $w = -1$ est exclue par b) : elle correspond à $\frac{\varphi_k}{2} = \frac{a + k\pi}{n} \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$.

— Pour les autres k , b) donne $z_k = \tan \frac{\varphi_k}{2} = \tan \frac{a + k\pi}{n}$.

— Toutes les solutions sont **réelles**, et distinctes car les w correspondants le sont et $z \mapsto w$ est injective.

d) $n = 2, a = 0$: $\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)^2 = 1$, donc $\frac{1 + iz}{1 - iz} = \pm 1$.

— $+1$: $1 + iz = 1 - iz$, donc $z = 0$; -1 : impossible d'après b).

— Formule : $k = 0$ donne $\tan 0 = 0$ ✓ ; $k = 1$ donne l'angle $\frac{\pi}{2}$, exclu ✓ Une seule solution, $z = 0$.

— **Leçon** : le nombre de solutions peut être **inférieur** à n ; la transformation $z \mapsto \frac{1 + iz}{1 - iz}$ envoie la droite réelle sur le cercle unité privé de -1 .

Réponse. Solutions $z_k = \tan \frac{a + k\pi}{n}$, $0 \leq k \leq n - 1$, $\frac{a + k\pi}{n} \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$; pour $n = 2, a = 0$: $z = 0$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : une équation réciproque

a) En $z = 0$, le membre de gauche vaut $2 \neq 0$. Les coefficients $2, -3, -1, -3, 2$ sont **symétriques** : pour $z \neq 0$,

$$z^4 P\left(\frac{1}{z}\right) = 2 - 3z - z^2 - 3z^3 + 2z^4 = P(z)$$

— Donc $P(z) = 0 \Leftrightarrow P\left(\frac{1}{z}\right) = 0$: les racines vont par paires $z, \frac{1}{z}$.

b) On divise par $z^2 \neq 0$ et on regroupe les termes symétriques :

$$- 2\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - 3\left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0.$$

$$- \text{Or } w^2 = z^2 + 2 + \frac{1}{z^2}, \text{ donc } z^2 + \frac{1}{z^2} = w^2 - 2.$$

— L'équation devient $2(w^2 - 2) - 3w - 1 = 0$, soit $2w^2 - 3w - 5 = 0$: **le degré est divisé par deux**.

c) $\Delta = 9 + 40 = 49$, donc $w = \frac{3 \pm 7}{4}$: $w = \frac{5}{2}$ ou $w = -1$.

- $z + \frac{1}{z} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2z^2 - 5z + 2 = 0$, de racines $z = 2$ et $z = \frac{1}{2}$ (inverses l'une de l'autre, comme prévu).
- $z + \frac{1}{z} = -1 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0$, de racines $j = e^{2i\pi/3}$ et $j^2 = \bar{j}$.
- **Solutions** : $2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

d) On recolle les facteurs obtenus :

$$2z^4 - 3z^3 - z^2 - 3z + 2 = (2z^2 - 5z + 2)(z^2 + z + 1) = (z - 2)(2z - 1)(z^2 + z + 1)$$

— **Vérification** du produit :

$$2z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 5z^3 - 5z^2 - 5z + 2z^2 + 2z + 2 = 2z^4 - 3z^3 - z^2 - 3z + 2 \quad \checkmark$$

— **Figure** : la courbe coupe l'axe exactement en $x = \frac{1}{2}$ et $x = 2$; les deux autres racines ne sont pas réelles ($z^2 + z + 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$).

— **Méthode à retenir** : un polynôme à coefficients symétriques de degré $2m$ se ramène à un polynôme de degré m en $w = z + \frac{1}{z}$.

Réponse. $w \in \{\frac{5}{2}, -1\}$; solutions $2, \frac{1}{2}, j, j^2$; $(z - 2)(2z - 1)(z^2 + z + 1)$.