

**Plaquette 5 - Exponentielle complexe,
fonctions et problèmes de synthèse**
Nombres complexes — Licence 1 (L1)
Corrections détaillées

Boîte à outils

Exponentielle complexe. Pour $z = x + iy$:

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y), \quad |e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \arg e^z \equiv \operatorname{Im} z [2\pi]$$

— $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$; $e^z \neq 0$; $e^z = e^{z'} \Leftrightarrow z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

— **Résoudre** $e^z = w$ ($w \neq 0$) : $z = \ln |w| + i(\arg w + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. $f = u + iv$ est dérivable si u et v le sont, et $f' = u' + iv'$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}, \quad \int_a^b e^{\lambda t} dt = \frac{e^{\lambda b} - e^{\lambda a}}{\lambda} \quad (\lambda \neq 0)$$

— $\operatorname{Re} \int f = \int \operatorname{Re} f$: on intègre l'exponentielle complexe puis on prend la partie réelle.

— **Inégalité utile** : $|e^{i\theta} - 1| = 2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \leq |\theta|$.

— **Matrice d'une similitude** : $a + ib \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

— $U_n = \{z : z^n = 1\}$ est un **groupe** pour la multiplication, à n éléments.

Correction de l'exercice 1 - Équations exponentielles

Méthode. On écrit $z = x + iy$ et le second membre sous forme exponentielle, puis on identifie **modules** et **arguments** :

$$e^x e^{iy} = r e^{i\alpha} \Leftrightarrow e^x = r \text{ et } y \equiv \alpha [2\pi]$$

a) $1 + i\sqrt{3} = 2 e^{i\pi/3}$. Donc $e^x = 2$, soit $x = \ln 2$, et $y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

— Solutions : $z = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$: une **infinité**, alignées verticalement et espacées de 2π .

— **Vérification** ($k = 0$) : $e^{\ln 2} e^{i\pi/3} = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 1 + i\sqrt{3} \checkmark$

b) $-1 = e^{i\pi}$: $e^x = 1$ donne $x = 0$, et $y = \pi + 2k\pi$. Solutions : $z = i(2k + 1)\pi$.

— $e^z = 0$ n'a **aucune** solution : $|e^z| = e^x > 0$.

c) On pose $w = e^z$: $w^2 - 3w + 2 = (w - 1)(w - 2) = 0$.

— $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2ik\pi$; $e^z = 2 \Leftrightarrow z = \ln 2 + 2ik\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

— **Piège** : ne pas s'arrêter à $z = 0$ et $z = \ln 2$; en complexe, chaque équation $e^z = w$ a une infinité de solutions.

d) $e^0 = e^{2i\pi} = 1$: pas injective.

— Si $e^z = e^{z'}$ avec z, z' dans la bande, alors $z - z' = 2ik\pi$. Or $\operatorname{Im}(z - z') \in] - 2\pi ; 2\pi[$ (différence de deux nombres de $] - \pi ; \pi[$), donc $k = 0$ et $z = z'$.

— **Conséquence** : sur cette bande, $e^z = w$ a une **unique** solution pour $w \neq 0$; c'est ainsi qu'on définit la **détermination principale** du logarithme complexe.

Réponse. a) $\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$; b) $i(2k + 1)\pi$, et aucune solution pour 0 ; c) $2ik\pi$ et $\ln 2 + 2ik\pi$.

Correction de l'exercice 2 – Image d'un rectangle par l'exponentielle

a) Sur la droite $\operatorname{Re} z = a$, $z = a + iy$ et $E(z) = e^a e^{iy}$: module constant e^a , argument y quelconque.

- Image : le **cercle** de centre O et de rayon e^a (parcouru une infinité de fois).
- Sur la droite $\operatorname{Im} z = b$, $E(x + ib) = e^x e^{ib}$: argument fixe b , module e^x décrivant $]0 ; +\infty[$.
- Image : la **demi-droite ouverte** issue de O (exclu) dirigée par e^{ib} .

b) Un point de R a un module image $e^x \in [1 ; e]$ et un argument $y \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$E(R) = \left\{ \rho e^{i\varphi} : 1 \leq \rho \leq e, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

- C'est le **quart de couronne** compris entre les cercles de rayons 1 et e , dans le premier quadrant.
- Les côtés verticaux deviennent des arcs de cercle, les côtés horizontaux des segments radiaux : les angles droits sont conservés.

c) Aire de R : $1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \approx 1,57$.

- Aire d'un quart de couronne : $\frac{1}{4}(\pi e^2 - \pi \times 1^2) = \frac{\pi(e^2 - 1)}{4} \approx 5,02$.
- L'aire est multipliée par environ 3,2 : E **dilate** les longueurs d'un facteur $|e^z| = e^x$, et les aires d'un facteur e^{2x} (moyenne de e^{2x} sur $[0 ; 1]$: $\frac{e^2 - 1}{2} \approx 3,19$ ✓).

d) Tout $w \neq 0$ s'écrit $|w| e^{i\alpha}$ avec un unique $\alpha \in [0 ; 2\pi[$: il est l'image de $\ln |w| + i\alpha$, et d'un seul point de la bande.

- Image : $\mathbb{C}^*$ tout entier, chaque point étant atteint **exactement une fois**.

Réponse. Droite verticale $\rightarrow$ cercle de rayon e^a ; horizontale $\rightarrow$ demi-droite ; $E(R)$: quart de couronne $1 \leq \rho \leq e$, d'aire $\frac{\pi(e^2 - 1)}{4}$; bande $\rightarrow \mathbb{C}^*$.

Correction de l'exercice 3 – Intégrer par l'exponentielle complexe

a) $e^{(1+i)t} = e^t \cos t + i e^t \sin t$. On dérive parties réelle et imaginaire :

- $(e^t \cos t)' = e^t(\cos t - \sin t)$ et $(e^t \sin t)' = e^t(\sin t + \cos t)$.
- Somme : $e^t[(\cos t - \sin t) + i(\sin t + \cos t)] = e^t(1 + i)(\cos t + i \sin t) = (1 + i)e^{(1+i)t}$ ✓

b) Par linéarité, $I + iJ = \int_0^\pi e^{(1+i)t} dt$, et d'après a) :

$$I + iJ = \left[\frac{e^{(1+i)t}}{1+i} \right]_0^\pi = \frac{e^\pi e^{i\pi} - 1}{1+i} = \frac{-e^\pi - 1}{1+i}$$

- On multiplie par le conjugué : $\frac{-(e^\pi + 1)(1 - i)}{2} = -\frac{e^\pi + 1}{2} + i \frac{e^\pi + 1}{2}$.
- Donc $I = -\frac{e^\pi + 1}{2} \approx -12,07$ et $J = \frac{e^\pi + 1}{2} \approx 12,07$.
- **Contrôle de signe** : sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$, $\cos < 0$ et $e^t y$ est grand : il est cohérent que $I < 0$; $\sin \geq 0$ sur $[0 ; \pi]$ donne bien $J > 0$.

c) Une primitive de $e^{(1+i)x}$ est $\frac{e^{(1+i)x}}{1+i} = \frac{1-i}{2} e^x (\cos x + i \sin x)$. Sa partie imaginaire :

$$F(x) = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}$$

— **Vérification** : $F'(x) = \frac{e^x(\sin x - \cos x) + e^x(\cos x + \sin x)}{2} = e^x \sin x \checkmark$

d) Par parties avec $u = \cos t$, $v' = e^t$: $I = [e^t \cos t]_0^\pi + J = -e^\pi - 1 + J$; puis $J = [e^t \sin t]_0^\pi - I = -I$.

— D'où $I = -e^\pi - 1 - I$, soit $2I = -(e^\pi + 1) \checkmark$ Même résultat, mais il faut deux intégrations et « reboucler » ; la méthode complexe donne **I et J** en un seul calcul.

Réponse. $I = -\frac{e^\pi + 1}{2}$, $J = \frac{e^\pi + 1}{2}$; primitive de $e^x \sin x$: $\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}$.

Correction de l'exercice 4 - Orthogonalité des cosinus

a) On multiplie les deux formules d'Euler :

$$\cos(mt) \cos(nt) = \frac{(e^{imt} + e^{-imt})(e^{int} + e^{-int})}{4}$$

— Le développement donne les quatre exponentielles d'exposants $\pm(m+n)$ et $\pm(m-n)$: c'est la formule demandée.

b) On intègre terme à terme avec $\int_0^{2\pi} e^{ikt} dt = 2\pi$ si $k = 0$, 0 sinon.

— $m+n \geq 2$: les deux premiers termes donnent 0.

— Si $m \neq n$: $m-n \neq 0$, tout est nul, et l'intégrale vaut 0.

— Si $m = n$: les deux derniers termes valent 1, d'où $\frac{1}{4}(2\pi + 2\pi) = \pi$.

$$\int_0^{2\pi} \cos(mt) \cos(nt) dt = \begin{cases} \pi & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

$$\text{c) } \sin(mt) \cos(nt) = \frac{(e^{imt} - e^{-imt})(e^{int} + e^{-int})}{4i}.$$

— Pour $m = n$, les termes constants sont +1 et -1 : ils s'annulent. Pour $m \neq n$, aucun terme constant.

— Donc l'intégrale est **toujours nulle**. (C'est aussi la parité : sur $[-\pi; \pi]$ l'intégrande est impaire.)

d) Par linéarité et b) :

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos 3t dt = \frac{1}{\pi} (3 \times 0 - 2 \times \pi + 5 \times 0) = -2 \checkmark$$

— **Portée** : c'est le principe des **séries de Fourier** : on « lit » chaque coefficient d'un signal en l'intégrant contre $\cos(nt)$; les autres fréquences disparaissent par orthogonalité.

Réponse. $\int_0^{2\pi} \cos(mt) \cos(nt) dt = \pi$ si $m = n$, 0 sinon ; $\int_0^{2\pi} \sin(mt) \cos(nt) dt = 0$; coefficient retrouvé : -2.

Correction de l'exercice 5 - Oscillateur amorti

a) $f = \lambda e^{\lambda t}$ et $f' = \lambda^2 e^{\lambda t}$ (dérivée de l'exponentielle complexe). Donc

$$f' + 2f + 5f = (\lambda^2 + 2\lambda + 5)e^{\lambda t}$$

— Comme $e^{\lambda t} \neq 0$, f est solution si et seulement si $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ (**équation caractéristique**).

— $\Delta = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$, donc $\lambda = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$.

b) $f(t) = e^{(-1+2i)t} = e^{-t} \cos 2t + i e^{-t} \sin 2t$ est solution.

— Les coefficients de (E) sont **réels** : en prenant partie réelle et partie imaginaire de $f' + 2f + 5f = 0$, on obtient que $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont solutions.

c) $y(0) = A = 1$. On dérive : $y' = -e^{-t}(A \cos 2t + B \sin 2t) + e^{-t}(-2A \sin 2t + 2B \cos 2t)$.

— $y'(0) = -A + 2B = 0$, donc $B = \frac{1}{2}$.

— **Solution** : $y(t) = e^{-t} \left(\cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t \right)$.

d) Forme amplitude-phase : $1 + \frac{1}{2}i = R e^{i\varphi}$ avec $R = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi = \arctan \frac{1}{2} \approx 0,464$ rad.

$$y(t) = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{-t} \cos(2t - \varphi)$$

— **Lecture de la figure** : la courbe oscille entre les enveloppes $\pm \frac{\sqrt{5}}{2} e^{-t}$ (partie réelle -1 de λ : l'**amortissement**) avec la pseudo-période $\frac{2\pi}{2} = \pi$ (partie imaginaire 2 : la **pulsation**).

— **Contrôle** : à $t = \pi$, $y(\pi) = e^{-\pi} \approx 0,043$; l'amplitude a été divisée par $e^\pi \approx 23$ en une pseudo-période.

Réponse. $\lambda = -1 \pm 2i$; $y(t) = e^{-t} \left(\cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{-t} \cos(2t - \varphi)$, $\varphi = \arctan \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 6 - Corde et arc

a) Angle moitié :

$$e^{i\theta} - 1 = e^{i\theta/2} (e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}) = 2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}$$

— Module : $|2i| \times \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \times 1 = 2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|$.

b) Avec $u = \frac{\theta}{2}$: $|e^{i\theta} - 1| = 2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \leq 2 \times \frac{|\theta|}{2} = |\theta|$.

— **Interprétation** : $|e^{i\theta} - 1|$ est la longueur de la **corde** $[IM]$, et $|\theta|$ la longueur de l'**arc** IM sur le cercle unité (pour $|\theta| \leq \pi$) : la corde est plus courte que l'arc.

c) On factorise par e^{ib} , de module 1 :

— $|e^{ia} - e^{ib}| = |e^{ib}| |e^{i(a-b)} - 1| = |e^{i(a-b)} - 1| \leq |a - b|$ par b).

— La fonction $t \mapsto e^{it}$ est donc **1-lipschitzienne**.

d) Par b), $|e^{0,01i} - 1| \leq 0,01$.

— Pour la seconde inégalité, on vérifie l'égalité intégrale : une primitive de $i(e^{it} - 1)$ est $e^{it} - it$, d'où $\int_0^\theta i(e^{it} - 1) dt = e^{i\theta} - i\theta - 1$ ✓

— Pour $\theta \geq 0$: $\left| \int_0^\theta i(e^{it} - 1) dt \right| \leq \int_0^\theta |e^{it} - 1| dt \leq \int_0^\theta t dt = \frac{\theta^2}{2}$ (même raisonnement pour $\theta < 0$).

— Donc $e^{i\theta} \approx 1 + i\theta$ avec une erreur $\leq \frac{\theta^2}{2}$: pour $\theta = 0,01$, erreur $\leq 5 \times 10^{-5}$, bien meilleure que l'approximation par 1.

Réponse. $|e^{i\theta} - 1| = 2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \leq |\theta|$; $|e^{ia} - e^{ib}| \leq |a - b|$; $|e^{i\theta} - 1 - i\theta| \leq \frac{\theta^2}{2}$.

Correction de l'exercice 7 - La spirale logarithmique

a) $\gamma(t) = e^{at}e^{it}$: module e^{at} , argument t .

— Après un tour ($t \mapsto t + 2\pi$), la distance à O est multipliée par $e^{2\pi a}$: les spires s'écartent **géométriquement**.

b) $\gamma'(t) = (a + i)e^{(a+i)t} = (a + i)\gamma(t)$. L'angle orienté entre $\overrightarrow{OM}$ (affixe $\gamma(t)$) et la vitesse (affixe $\gamma'(t)$) est

$$\arg \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = \arg(a + i) = \arctan \frac{1}{a}$$

— Il ne dépend **pas** de t : la spirale coupe tous les rayons issus de O sous le même angle (c'est la propriété caractéristique de la spirale **équiangle**).

c) $|\gamma'(t)| = |a + i|e^{at} = \sqrt{a^2 + 1}e^{at}$. Pour $X < 0$:

$$\int_X^0 \sqrt{a^2 + 1} e^{at} dt = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} (1 - e^{aX}) \xrightarrow{X \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a}$$

— La spirale fait une **infinité de tours** autour de O mais sa longueur est **finie**.

d) Avec $a = 0,2$:

— facteur par tour $e^{0,4\pi} \approx 3,51$;

— angle constant $\arctan 5 \approx 1,373 \text{ rad} \approx 78,7^\circ$ (presque un cercle, qui aurait 90°) ;

— longueur $\frac{\sqrt{1,04}}{0,2} \approx 5,10$.

— **Exemples** : coquille du nautilus, bras des galaxies spirales, trajectoire d'un insecte qui garde un angle constant avec une lampe.

Réponse. $|\gamma(t)| = e^{at}$, facteur $e^{2\pi a}$ par tour ; angle constant $\arctan \frac{1}{a}$; longueur $\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a}$ ($\approx 5,10$ pour $a = 0,2$).

Correction de l'exercice 8 - Matrices de similitude

a) Pour $w = x + iy$: $zw = (ax - by) + i(bx + ay)$. En coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

— $M(z)$ est la matrice de la **similitude** de rapport $|z|$ et d'angle $\arg z$.

b) La composée de $w \mapsto z'w$ puis $w \mapsto zw$ est $w \mapsto zz'w$; la matrice d'une composée est le produit des matrices : $M(z)M(z') = M(zz')$.

— La somme est immédiate (addition coefficient par coefficient).

— $J^2 = M(i)^2 = M(i^2) = M(-1) = -I_2$. **Vérification** : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \checkmark$

— **Conclusion** : l'ensemble des $M(z)$ est un « modèle matriciel » de $\mathbb{C}$, dans lequel J joue le rôle de i .

c) $\det M(z) = a^2 + b^2 = |z|^2$: non nul si et seulement si $z \neq 0$.

— Pour $z \neq 0$: $M(z)M\left(\frac{1}{z}\right) = M(1) = I_2$, donc $M(z)^{-1} = M\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ (car $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$).

d) $M(1 + i)^8 = M\left((1 + i)^8\right)$. Or $1 + i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$, donc $(1 + i)^8 = 16 e^{2i\pi} = 16$:

$$M(1+i)^8 = M(16) = 16I_2$$

— **Interprétation** : huit rotations de 45° font un tour complet, et huit homothéties de rapport $\sqrt{2}$ donnent le rapport 16.

Réponse. $M(z)M(z') = M(zz')$, $J^2 = -I_2$, $\det M(z) = |z|^2$, $M(z)^{-1} = M(1/z)$;
 $M(1+i)^8 = 16I_2$.

Correction de l'exercice 9 - Le groupe des racines de l'unité

a) Critère : une partie H d'un groupe est un sous-groupe si elle contient le neutre et est stable par produit et par inverse.

— $U : |1| = 1$; $|zz'| = |z||z'| = 1$; $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = 1$. Sous-groupe ✓

— $U_n \subset U$ car $|z|^n = |z^n| = 1$ impose $|z| = 1$. Puis $1^n = 1$; $(zz')^n = z^n z'^n = 1$; $\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n} = 1$.
 Sous-groupe ✓

b) Les racines n -ièmes de $1 = e^0$ sont les $e^{2ik\pi/n} = \omega^k$, $0 \leq k \leq n-1$, et elles sont distinctes : U_n a n éléments, tous puissances de ω .

c) $U_d \subset U_m \cap U_n$: si $z^d = 1$, alors $z^m = (z^d)^{m/d} = 1$ et de même $z^n = 1$.

— Réciproquement, par le **théorème de Bézout**, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $um + vn = d$.
 Si $z^m = z^n = 1$:

$$z^d = z^{um+vn} = (z^m)^u (z^n)^v = 1$$

— (Les exposants négatifs ont un sens car $z \neq 0$.) Donc $U_m \cap U_n = U_d$.

d) $\text{pgcd}(12, 18) = 6 : U_{12} \cap U_{18} = U_6$.

— **Vérification sur les arguments** (en fraction de tour) : U_{12} contient les $\frac{k}{12}$ et U_{18} les $\frac{\ell}{18}$. Une fraction de dénominateur divisant 12 et 18 a un dénominateur divisant 6 : ce sont les $\frac{j}{6}$, soit les 6 racines sixièmes ✓ (par exemple $\frac{2}{12} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$).

— **Remarque** : Bézout, vu en arithmétique, sert ici en géométrie du cercle.

Réponse. U et U_n sont des groupes ; $U_n = \{\omega^k\}$; $U_m \cap U_n = U_{\text{pgcd}(m,n)}$; $U_{12} \cap U_{18} = U_6$.

Correction de l'exercice 10 - Une suite qui converge vers $4/\pi$

a) $|z_0| = r$, donc $z_1 = \frac{re^{i\theta} + r}{2} = \frac{r}{2}(1 + e^{i\theta})$. Angle moitié :

$$1 + e^{i\theta} = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\theta/2} \implies z_1 = r \cos \frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}$$

— Comme $\frac{\theta}{2} \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $\cos \frac{\theta}{2} > 0$: c'est une vraie forme exponentielle, de module $r_1 = r \cos \frac{\theta}{2}$ et d'argument $\frac{\theta}{2}$.

b) Posons $P_n = \prod_{k=1}^n \cos \frac{\theta}{2^k} > 0$. Si $z_n = rP_n e^{i\theta/2^n}$, a) appliqué à z_n (module rP_n , argument $\frac{\theta}{2^n} \in]0; \pi[$) donne

— $z_{n+1} = rP_n \cos \frac{\theta}{2^{n+1}} e^{i\theta/2^{n+1}} = rP_{n+1} e^{i\theta/2^{n+1}}$. L'initialisation $n = 0$ ($P_0 = 1$) est évidente.

c) On utilise $\sin 2u = 2 \sin u \cos u$ de proche en proche (récurrence sur n) :

$$- \sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 4 \sin \frac{\theta}{4} \cos \frac{\theta}{4} \cos \frac{\theta}{2} = \dots = 2^n \sin \frac{\theta}{2^n} P_n.$$

$$- \text{Donc } P_n = \frac{\sin \theta}{2^n \sin(\theta/2^n)}. \text{ Or } 2^n \sin \frac{\theta}{2^n} = \theta \cdot \frac{\sin(\theta/2^n)}{\theta/2^n} \rightarrow \theta, \text{ car } \frac{\sin u}{u} \rightarrow 1 \text{ en } 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \frac{r \sin \theta}{\theta} \times e^0 = \frac{r \sin \theta}{\theta}$$

$$\mathbf{d)} \ z_0 = 2i : r = 2, \theta = \frac{\pi}{2}.$$

$$- z_1 = \frac{2i+2}{2} = 1+i; z_2 = \frac{1+i+\sqrt{2}}{2} \approx 1,207 + 0,5i.$$

$$- \text{Limite : } \frac{2 \times 1}{\pi/2} = \frac{4}{\pi} \approx 1,2732. \text{ Numériquement } z_5 \approx 1,2722 + 0,0625i \checkmark$$

— **Figure** : l'argument est divisé par 2 à chaque étape ($\operatorname{Im} z_n = \frac{2}{2^n}$), et les points glissent vers le point réel $\frac{4}{\pi}$. C'est la formule de **Viète** : $\frac{2}{\pi} = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{16} \dots$

Réponse. $z_n = r \prod_{k=1}^n \cos \frac{\theta}{2^k} e^{i\theta/2^n} \rightarrow \frac{r \sin \theta}{\theta}$; pour $z_0 = 2i : z_1 = 1+i$, limite $\frac{4}{\pi}$.

Correction de l'exercice 11 - Dérivées successives

a) $g(x) = e^x(\cos x + i \sin x)$ a pour partie réelle f . Dériver une fonction à valeurs complexes, c'est dériver parties réelle et imaginaire : $(\operatorname{Re} g)' = \operatorname{Re} g'$, et par récurrence $f^{(n)} = \operatorname{Re} g^{(n)}$.

b) $g^{(n)}(x) = (1+i)^n e^{(1+i)x}$. Avec $1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$:

$$g^{(n)}(x) = 2^{n/2} e^{in\pi/4} e^x e^{ix} = 2^{n/2} e^x e^{i(x+n\pi/4)}$$

$$- \text{Partie réelle : } f^{(n)}(x) = 2^{n/2} e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right).$$

c) $n = 1 : f(x) = e^x \cos x - e^x \sin x$. Formule :

$$\sqrt{2} e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} e^x \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x\right) = e^x(\cos x - \sin x) \checkmark$$

$$- n = 2 : f'(x) = e^x(\cos x - \sin x) + e^x(-\sin x - \cos x) = -2e^x \sin x. \text{ Formule : } 2e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -2e^x \sin x \checkmark$$

$$\mathbf{d)} \text{ En } x = 0 : f^{(n)}(0) = 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4}.$$

$$- f^{(8)}(0) = 2^4 \cos 2\pi = 16.$$

$$- f^{(10)}(0) = 2^5 \cos \frac{5\pi}{2} = 0.$$

— **Leçon** : la formule de Leibniz donnerait une somme de $n+1$ termes ; le passage par l'exponentielle complexe donne une formule **close**.

Réponse. $f^{(n)}(x) = 2^{n/2} e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$; $f^{(8)}(0) = 16$, $f^{(10)}(0) = 0$.

Correction de l'exercice 12 - Moyenne sur le cercle et formule de Parseval

a) Par linéarité, $\int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}) d\theta = \sum_k a_k \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\theta$, et l'intégrale vaut 2π pour $k = 0$, 0 sinon. D'où la moyenne $a_0 = P(0)$: la **valeur au centre est la moyenne sur le cercle**.

b) $|w|^2 = w\bar{w}$ et $e^{ik\theta} = e^{-ik\theta}$:

$$|P(e^{i\theta})|^2 = \left(\sum_j a_j e^{ij\theta}\right) \left(\sum_k \bar{a}_k e^{-ik\theta}\right) = \sum_{j,k} a_j \bar{a}_k e^{i(j-k)\theta}$$

— On intègre : seuls les termes $j = k$ survivent, chacun donnant $2\pi a_k \bar{a}_k = 2\pi |a_k|^2$. On divise par 2π : Parseval.

c) Si $|P(z)| \leq M$ sur le cercle, alors la moyenne de $|P|^2$ est $\leq M^2 : \sum |a_k|^2 \leq M^2$. En prenant $M = \max_{|z|=1} |P(z)|$ (qui existe : fonction continue sur un fermé borné), on obtient l'inégalité.

d) $\sum |a_k|^2 = 1 + 4 + 9 = 14$: la moyenne de $|P|^2$ sur le cercle vaut 14.

— En $z = 1$: $|P(1)| = 6$, et $|P(z)| \leq 1 + 2 + 3 = 6$ par l'inégalité triangulaire : le maximum vaut exactement 6.

— On a bien $6 \geq \sqrt{14} \approx 3,74$ ✓

— **Contrôle** de a) : la moyenne de P elle-même vaut $P(0) = 1$, bien que $|P|$ atteigne 6.

— **Portée** : Parseval relie l'« énergie » d'un signal (moyenne de $|P|^2$) à la somme des carrés de ses coefficients ; c'est un résultat central de l'analyse de Fourier.

Réponse. Moyenne de P : a_0 ; moyenne de $|P|^2$: $\sum |a_k|^2$; $\max |P| \geq \sqrt{\sum |a_k|^2}$; pour $1 + 2z + 3z^2$: 14 et $\max = 6 \geq \sqrt{14}$.

Correction de l'exercice 13 - Bras de robot articulé

a) Le coude est à l'extrémité du premier segment : affixe $L_1 e^{i\theta_1}$. Le second segment a pour direction absolue $\theta_1 + \theta_2$ (les angles de rotation **s'ajoutent** quand on compose), et pour longueur L_2 : son vecteur a pour affixe $L_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$. On additionne.

b) $3e^{i\pi/3} = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ et $2e^{5i\pi/6} = -\sqrt{3} + i$.

— $p = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right) + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 1\right)i \approx -0,23 + 3,60i$.

— $|p| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \approx 3,61$ (par c), avec $\cos \frac{\pi}{2} = 0$: les deux segments forment un angle droit, Pythagore).

c) On factorise par $e^{i\theta_1}$, de module 1 :

$$|p|^2 = |L_1 + L_2 e^{i\theta_2}|^2 = (L_1 + L_2 \cos \theta_2)^2 + (L_2 \sin \theta_2)^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 \cos \theta_2$$

— $\cos \theta_2$ décrit $[-1; 1]$, donc $|p|^2$ décrit $[(L_1 - L_2)^2; (L_1 + L_2)^2] = [1; 25]$.

— Zone accessible (en tournant θ_1) : la **couronne** $1 \leq |p| \leq 5$. C'est aussi l'inégalité triangulaire et son cas d'égalité.

d) $|p| = 4$: $13 + 12 \cos \theta_2 = 16$, donc $\cos \theta_2 = \frac{1}{4}$, $\theta_2 = \pm \arccos \frac{1}{4} \approx \pm 1,318$ rad ($\approx \pm 75,5^\circ$).

— On veut $\arg p = 0$: $\arg p = \theta_1 + \arg(3 + 2e^{i\theta_2})$, d'où $\theta_1 = -\arg(3 + 2e^{i\theta_2})$.

— Avec $\theta_2 > 0$: $3 + 2e^{i\theta_2} = 3,5 + 2 \times \frac{\sqrt{15}}{4}i \approx 3,5 + 1,936i$, d'argument $\arctan \frac{1,936}{3,5} \approx 0,505$ rad. Donc $\theta_1 \approx -0,505$ rad ($\approx -28,96^\circ$).

— **Deux configurations** (« coude en haut », « coude en bas ») : $\theta_2 \approx \pm 1,318$, $\theta_1 \approx \mp 0,505$. C'est le problème de **cinématique inverse** en robotique.

Réponse. $p \approx -0,23 + 3,60i$, $|p| = \sqrt{13}$; zone accessible $1 \leq |p| \leq 5$; $\cos \theta_2 = \frac{1}{4}$, $\theta_1 \approx \mp 0,505$ rad.

Correction de l'exercice 14 - Cosinus d'un nombre complexe

a) Pour $z = x$ réel, c'est la formule d'Euler : $\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x$. La parité est évidente :

changer z en $-z$ échange les deux termes.

b) $\cos(iy) = \frac{e^{-y} + e^y}{2} = \operatorname{ch} y$ (cosinus hyperbolique).

— $\operatorname{ch} y \rightarrow +\infty$ quand $y \rightarrow +\infty$: le cosinus **n'est pas borné** sur $\mathbb{C}$. L'inégalité $|\cos| \leq 1$ est propre aux réels.

c) Avec $w = e^{iz} \neq 0$: $\frac{w + w^{-1}}{2} = 2 \Leftrightarrow w^2 - 4w + 1 = 0$.

$$w = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

— Les deux valeurs sont réelles **positives** et inverses l'une de l'autre ($(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$).

— $e^{iz} = 2 + \sqrt{3}$: en écrivant $iz = \ln(2 + \sqrt{3}) + 2ik\pi$, on obtient $z = 2k\pi - i\ln(2 + \sqrt{3})$.

— $e^{iz} = 2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$: $z = 2k\pi + i\ln(2 + \sqrt{3})$.

— **Solutions** : $z = 2k\pi \pm i\ln(2 + \sqrt{3})$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) $\ln(2 + \sqrt{3}) \approx 1,317$. Pour $z = i\ln(2 + \sqrt{3})$: $\cos z = \operatorname{ch}(1,317) = \frac{(2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})}{2} = 2$ ✓
(calcul exact, sans approximation).

— **Leçon** : une équation sans solution réelle ($\cos x = 2$) a des solutions complexes ; c'est le même phénomène que pour $x^2 = -1$.

Réponse. $\cos(iy) = \operatorname{ch} y$, non borné ; $\cos z = 2 \Leftrightarrow z = 2k\pi \pm i\ln(2 + \sqrt{3})$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : une somme trigonométrique pondérée

a) $\frac{\cos(kx)}{\cos^k x} = \operatorname{Re} \frac{e^{ikx}}{\cos^k x} = \operatorname{Re} q^k$ ($\cos^k x$ est réel). Par additivité de la partie réelle,
 $S_n = \operatorname{Re} \sum q^k$.

— $q = \frac{\cos x + i \sin x}{\cos x} = 1 + i \tan x$, et $q \neq 1$ car $\tan x \neq 0$.

b) Somme géométrique, avec $q - 1 = i \tan x$:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{q^{n+1} - 1}{i \tan x} = -i \frac{q^{n+1} - 1}{\tan x}$$

— Pour tout complexe w , $\operatorname{Re}(-iw) = \operatorname{Im} w$. Donc $S_n = \frac{\operatorname{Im}(q^{n+1} - 1)}{\tan x} = \frac{\operatorname{Im} q^{n+1}}{\tan x}$.

— $q^{n+1} = \frac{e^{i(n+1)x}}{\cos^{n+1} x}$, de partie imaginaire $\frac{\sin((n+1)x)}{\cos^{n+1} x}$.

$$S_n = \frac{\sin((n+1)x)}{\cos^{n+1} x} \times \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin x \cos^n x}$$

c) $n = 0$: $S_0 = 1$ et la formule donne $\frac{\sin x}{\sin x} = 1$ ✓

— $n = 1$: $S_1 = 1 + 1 = 2$; formule $\frac{\sin 2x}{\sin x \cos x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x \cos x} = 2$ ✓

— **Contrôle numérique** pour $x = 0,5$ et $n = 6$: somme directe et formule donnent toutes deux $-1,6017$ ✓

d) $x = \frac{\pi}{4}$: $\sin x = \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\sin x \cos^n x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} = 2^{-(n+1)/2}$.

— $S_n = 2^{(n+1)/2} \sin \frac{(n+1)\pi}{4}$.

- Pour $n + 1 = 4m + 2$: $\sin = \pm 1$ et $|S_n| = 2^{2m+1} \rightarrow +\infty$; pour $n + 1$ multiple de 4 : $S_n = 0$.
- (S_n) n'a **pas de limite** : une sous-suite est nulle, une autre tend en valeur absolue vers $+\infty$. Normal : $|q| = \sqrt{2} > 1$, la série géométrique diverge.

Réponse. $S_n = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin x \cos^n x}$; pour $x = \frac{\pi}{4}$: $S_n = 2^{(n+1)/2} \sin \frac{(n+1)\pi}{4}$, sans limite.