

**Plaquette 1 - Forme algébrique,
module, argument et racines n-ièmes**
Nombres complexes — Licence 1 (L1)
Corrections détaillées

Boîte à outils**Formes et opérations.**

- $z = a + ib$; $\operatorname{Re}(z) = a$, $\operatorname{Im}(z) = b$, $\bar{z} = a - ib$.
- **Module** : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, avec $|z|^2 = z\bar{z}$, $|zz'| = |z||z'|$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.
- **Inverse** : $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ — c'est la technique du **conjugué** pour les quotients.
- **Forme exponentielle** : $z = re^{i\theta}$ avec $r = |z| > 0$ et $\theta = \arg z$ (modulo 2π).

Formules clés.

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} \quad (\text{Moivre}) \quad 1 + e^{i\theta} = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}$$

Équations.

- **Second degré à coefficients réels**, $\Delta < 0$: $z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, racines **conjuguées**.
- **Racines n-ièmes** de $z_0 = re^{i\theta}$: les n nombres $\sqrt[n]{r} e^{i(\theta + 2k\pi)/n}$, $0 \leq k \leq n-1$ — sommets d'un **polygone régulier**.
- **Racines de l'unité** : $e^{2ik\pi/n}$; leur **somme est nulle** pour $n \geq 2$.
- **Théorème de d'Alembert-Gauss** : tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine ; il est **scindé**.

Géométrie. $|z - z'|$ est la distance entre les points d'affixes z, z' ; $\arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$; multiplier par $re^{i\theta}$ est une **rotation-homothétie**.

Correction de l'exercice 1 - Forme algébrique d'un quotient

- **Multiplication par le conjugué** du dénominateur :

$$z = \frac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$$

- **Dénominateur** : $4 + 1 = 5$.
- **Numérateur** : $6 - 3i - 2i + i^2 = 6 - 5i - 1 = 5 - 5i$.
- **Résultat** : $z = \frac{5-5i}{5} = 1 - i$.
- **Contrôle par les modules** : $|3-i| = \sqrt{10}$, $|2+i| = \sqrt{5}$, donc $|z| = \sqrt{2}$; et $|1-i| = \sqrt{2}$ ✓
- **Contrôle direct** : $(1-i)(2+i) = 2 + i - 2i + 1 = 3 - i$ ✓
- **Méthode** : le conjugué du dénominateur transforme celui-ci en un **réel positif** ($|z'|^2$) — c'est le réflexe universel pour les quotients.

Réponse. $z = 1 - i$.

Correction de l'exercice 2 - Module et argument

- **Module** : $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.
- **Factorisation** : $z = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right)$.
- On cherche θ avec $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$: le point est dans le **deuxième quadrant**, donc $\theta = \frac{3\pi}{4}$.
- **Résultat** : $z = \sqrt{2} e^{3i\pi/4}$.
- **Contrôle** : $\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2} (-0,7071 + 0,7071i) = -1 + i \checkmark$
- **Piège à éviter** : calculer $\arctan \frac{b}{a} = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ donnerait un **mauvais quadrant**. Il faut toujours vérifier les signes de a et b .

Réponse. $z = \sqrt{2} e^{3i\pi/4}$.

Correction de l'exercice 3 - Puissance par Moivre

- **Forme exponentielle** : $|1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$, et $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ correspond à $\theta = -\frac{\pi}{3}$.
 - Donc $1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\pi/3}$.
 - **Moivre** :
- $$(1 - i\sqrt{3})^6 = 2^6 e^{-2i\pi} = 64$$
- **Résultat réel** : 64.
 - **Contrôle** : $(1 - i\sqrt{3})^2 = 1 - 2i\sqrt{3} - 3 = -2 - 2i\sqrt{3} = 4e^{-2i\pi/3}$, puis au cube : $64e^{-2i\pi} = 64 \checkmark$
 - **Leçon** : élever à une puissance élevée en forme **algébrique** est très lourd ; la forme exponentielle rend le calcul immédiat.

Réponse. $(1 - i\sqrt{3})^6 = 64$.

Correction de l'exercice 4 - Équation du second degré

- **Discriminant** : $\Delta = 16 - 52 = -36 < 0$.
- **Racines** : $z = \frac{4 \pm i\sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$.
- **Contrôles** : somme = $4 = -\frac{b}{a} \checkmark$; produit = $(2+3i)(2-3i) = 4+9 = 13 = \frac{c}{a} \checkmark$
- Les racines sont **conjuguées**, propriété automatique pour un polynôme à coefficients réels.
- **Module commun** : $|2 \pm 3i| = \sqrt{13}$, cohérent avec $\sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{13} \checkmark$
- **Interprétation géométrique** : les deux racines sont symétriques par rapport à l'axe réel, sur la verticale d'abscisse 2.

Réponse. $z = 2 + 3i$ et $z = 2 - 3i$.

Correction de l'exercice 5 - Racines carrées complexes

On cherche $z = a + ib$ avec $z^2 = 3 + 4i$.

- **Trois équations** : $a^2 - b^2 = 3$ (partie réelle), $2ab = 4$ (partie imaginaire) et $a^2 + b^2 = |z_0| = 5$ (modules).

- **Somme des première et troisième** : $2a^2 = 8$, donc $a = \pm 2$.
- **Différence** : $2b^2 = 2$, donc $b = \pm 1$.
- **Signe** : $2ab = 4 > 0$, donc a et b sont de **même signe**.
- **Racines** : $z = 2 + i$ et $z = -2 - i$.
- **Vérification** : $(2 + i)^2 = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i$ ✓
- **Méthode** : l'ajout de l'équation des **modules** est l'astuce qui rend le système linéaire en a^2 et b^2 .

Réponse. $z = 2 + i$ et $z = -2 - i$.

Correction de l'exercice 6 - Racines n -ièmes de l'unité

- **Solutions de $z^4 = 1$** : $e^{2ik\pi/4} = e^{ik\pi/2}$ pour $k = 0, 1, 2, 3$.
- Explicitement : $1, i, -1, -i$.
- **Somme** : $1 + i - 1 - i = 0$ ✓ — conforme au résultat général (somme des racines n -ièmes nulle pour $n \geq 2$).
- **Produit** : $1 \times i \times (-1) \times (-i) = i \times i = -1$.
- **Vérification par les coefficients** : $z^4 - 1$ a pour somme des racines 0 (pas de terme en z^3) et pour produit $(-1)^4 \times (-1) = -1$ ✓
- **Géométrie** : les quatre points forment un **carré** inscrit dans le cercle unité, de sommets sur les axes.
- **Généralisation** : le produit des racines n -ièmes vaut $(-1)^{n+1}$.

Réponse. $\{1, i, -1, -i\}$; somme 0, produit -1 .

Correction de l'exercice 7 - Racines cubiques

- **Forme exponentielle du second membre** : $8i = 8e^{i\pi/2}$.
- **Module des solutions** : $r^3 = 8$, donc $r = 2$.
- **Arguments** : $3\theta \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$, donc $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ pour $k = 0, 1, 2$.
- **Les trois solutions** :

$$2e^{i\pi/6}, \quad 2e^{5i\pi/6}, \quad 2e^{3i\pi/2}$$
- **Formes algébriques** : $\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i, -2i$.
- **Vérification** : $(-2i)^3 = -8i^3 = -8 \times (-i) = 8i$ ✓
- **Contrôle de la somme** : $\sqrt{3} + i - \sqrt{3} + i - 2i = 0$ ✓ (pas de terme en z^2).
- **Géométrie** : triangle **équilatéral** de centre O , inscrit dans le cercle de rayon 2.

Réponse. $\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i$ et $-2i$.

Correction de l'exercice 8 - Formule d'Euler et linéarisation

- **Point de départ** : $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.
- **Élévation au carré** :

$$\sin^2 \theta = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^2}{(2i)^2} = \frac{e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta}}{-4}$$
- On regroupe : $e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} = 2 \cos 2\theta$, donc

$$\sin^2 \theta = \frac{2 \cos 2\theta - 2}{-4} = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

- **Contrôles** : $\theta = 0$ donne 0 des deux côtés ✓ ; $\theta = \frac{\pi}{2}$ donne 1 et $\frac{1+1}{2} = 1$ ✓
- **Usage** : la linéarisation permet d'**intégrer** $\sin^2$, dont la primitive est $\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}$.
- **Formule jumelle** : $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$.

Réponse. $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$.

Correction de l'exercice 9 - Interprétation géométrique

- **Vecteurs** : $b - a = 2 + i$ et $c - a = -1 + 2i$.
- **Quotient** : on remarque que $i(2 + i) = 2i - 1$, donc

$$\frac{c - a}{b - a} = \frac{-1 + 2i}{2 + i} = i = e^{i\pi/2}$$
- **Module 1** : $AC = AB$; **argument** $\frac{\pi}{2}$: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$.
- **Conclusion** : ABC est **rectangle isocèle en A**, et C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- **Contrôle** : $AB = AC = \sqrt{5}$ et $BC = |-3 + i| = \sqrt{10} = \sqrt{2} AB$ ✓
- **Critère à retenir** : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ **réel** $\Leftrightarrow$ alignement ; **imaginaire pur** $\Leftrightarrow$ angle droit en A ; de **module 1** $\Leftrightarrow$ triangle isocèle en A .

Réponse. $\frac{c - a}{b - a} = i$: rectangle isocèle en A .

Correction de l'exercice 10 - Ensemble de points

- **Premier ensemble** : $|z - 2| = 3$ signifie que la distance de M au point $A(2; 0)$ vaut 3 — c'est le **cercle** de centre A et de rayon 3.
- **Second ensemble** : l'égalité $|z - 1| = |z + 1|$ (pour $z \neq -1$) signifie $MA' = MB'$ avec $A'(1; 0)$ et $B'(-1; 0)$.
- C'est la **médiatrice** de $[A'B']$, soit l'**axe des ordonnées** ($x = 0$).
- **Vérification algébrique** : avec $z = x + iy$, $(x - 1)^2 + y^2 = (x + 1)^2 + y^2$ donne $-2x = 2x$, donc $x = 0$ ✓
- **Contrôle** : $z = 2i$ donne $\left| \frac{2i - 1}{2i + 1} \right| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$ ✓
- **Méthode** : traduire **systématiquement** les modules en **distances** — la géométrie donne la réponse plus vite que le calcul.

Réponse. Cercle de centre $(2; 0)$ et rayon 3 ; puis l'axe des ordonnées.

Correction de l'exercice 11 - Somme géométrique

- **Somme géométrique** de raison $i \neq 1$:

$$S = \frac{1 - i^{2027}}{1 - i}$$

- **Calcul de i^{2027}** : le cycle des puissances de i est de longueur 4. Or $2027 = 4 \times 506 + 3$, donc $i^{2027} = i^3 = -i$.

$$S = \frac{1 + i}{1 - i} = \frac{(1 + i)^2}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

- **Contrôle par regroupement** : chaque bloc de quatre termes consécutifs somme à 0 ($1 + i - 1 - i$). Il y a 2027 termes, soit 506 blocs complets et 3 termes restants : $1 + i - 1 = i$ ✓

— **Méthode** : réduire l'exposant **modulo 4** est le réflexe pour toute puissance de i .

Réponse. $S = i$.

Correction de l'exercice 12 - Transformation géométrique

— **Écriture** : $f(z) = az + b$ avec $a = 2i$ et $b = 1$.

— $|a| = 2$ et $\arg a = \frac{\pi}{2}$: c'est une **similitude directe** de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

— **Point fixe** : $z = 2iz + 1$ donne $z(1 - 2i) = 1$, donc

$$z_0 = \frac{1}{1 - 2i} = \frac{1 + 2i}{5} = 0,2 + 0,4i$$

— **Conclusion** : f est la composée d'une **rotation** d'angle $\frac{\pi}{2}$ et d'une **homothétie** de rapport 2, toutes deux centrées en z_0 .

— **Vérification** : $f(z_0) = 2i(0,2 + 0,4i) + 1 = 0,4i - 0,8 + 1 = 0,2 + 0,4i = z_0 \checkmark$

— **Effet sur une figure** : les longueurs sont **doublées**, les angles **conservés**, l'orientation préservée (similitude **directe**).

Réponse. Similitude directe de centre $0,2 + 0,4i$, rapport 2, angle $\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 13 - Compléter un carré

Dans un carré $ABCD$ direct, $\overrightarrow{AD}$ se déduit de $\overrightarrow{AB}$ par la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire la multiplication par i :

$$d - a = i(b - a), \quad c - b = i(b - a)$$

— $b - a = 2 + i$ et $i(2 + i) = -1 + 2i$.

— Donc $d = 1 + i - 1 + 2i = 3i$ et $c = 3 + 2i - 1 + 2i = 2 + 4i$.

— **Contrôle** : le centre est le milieu des diagonales, $\frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i \checkmark$

— Pour le carré de sens indirect, on multiplierait par $-i$.

Réponse. $c = 2 + 4i$, $d = 3i$.

Correction de l'exercice 14 - Une équation avec le conjugué

— **Solution nulle** : $z = 0$ convient.

— **Si** $z \neq 0$: en passant au module, $|z|^2 = |z|$, donc $|z| = 1$. On écrit $z = e^{i\theta}$:

$$e^{2i\theta} = e^{-i\theta} \Leftrightarrow e^{3i\theta} = 1 \Leftrightarrow \theta \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{3} \right]$$

— Les solutions non nulles sont les **racines cubiques de l'unité** : $1, j = e^{2i\pi/3}$ et $j^2 = \bar{j}$.

— **Vérification** pour j : $j^2 = e^{4i\pi/3} = e^{-2i\pi/3} = \bar{j} \checkmark$

— **Bilan** : quatre solutions, $0, 1, j, j^2$. L'équation n'est pas polynomiale en z (à cause de $\bar{z}$), d'où plus de deux solutions.

Réponse. $\{0, 1, j, j^2\}$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : factorisation d'un polynôme

Dans C. On résout $z^4 = -1 = e^{i\pi}$.

— **Solutions** : $z_k = e^{i(\pi + 2k\pi)/4} = e^{i(2k+1)\pi/4}$ pour $k = 0, 1, 2, 3$.

— Soit $e^{i\pi/4}, e^{3i\pi/4}, e^{5i\pi/4}, e^{7i\pi/4}$, de formes algébriques $\frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$.

$$P(z) = \prod_{k=0}^3 (z - e^{i(2k+1)\pi/4})$$

Dans $\mathbb{R}$. On regroupe les racines **conjuguées** deux à deux.

$$- (z - e^{i\pi/4})(z - e^{-i\pi/4}) = z^2 - 2 \cos \frac{\pi}{4} z + 1 = z^2 - \sqrt{2} z + 1.$$

$$- \text{De même avec } \frac{3\pi}{4} : z^2 + \sqrt{2} z + 1.$$

$$z^4 + 1 = (z^2 - \sqrt{2} z + 1)(z^2 + \sqrt{2} z + 1)$$

$$- \textbf{Vérification} : \text{le produit vaut } (z^2 + 1)^2 - 2z^2 = z^4 + 2z^2 + 1 - 2z^2 = z^4 + 1 \quad \checkmark$$

— **Leçon** : $z^4 + 1$ n'a **aucune** racine réelle mais **n'est pas irréductible** dans $\mathbb{R}[X]$ — dans $\mathbb{R}$, les irréductibles sont les degrés 1 et les degrés 2 de discriminant négatif.

Réponse. $(z^2 - \sqrt{2} z + 1)(z^2 + \sqrt{2} z + 1)$.