

Plaquette 4 - Géométrie plane et transformations par les complexes

Nombres complexes — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Traductions de base (A, B, C, D d'affixes a, b, c, d) :

$$AB = |b - a|, \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg \frac{c - a}{b - a} [2\pi]$$

- A, B, C **alignés** ($a \neq b$) $\Leftrightarrow \frac{c - a}{b - a} \in \mathbb{R}$; $(AB) \perp (AC) \Leftrightarrow \frac{c - a}{b - a} \in i\mathbb{R}$.
- A, B, C, D distincts, non alignés trois à trois, sont **cocycliques** $\Leftrightarrow \frac{c - a}{c - b} / \frac{d - a}{d - b} \in \mathbb{R}$.
- ABC **équilatéral direct** $\Leftrightarrow c - a = e^{i\pi/3}(b - a) \Leftrightarrow a + jb + j^2c = 0$, avec $j = e^{2i\pi/3}$.
- **Aire** du triangle ABC : $\frac{1}{2} |\operatorname{Im}(\overline{(b - a)}(c - a))|$.

Transformations.

$$z \mapsto az + b \quad (a \neq 0, a \neq 1): \text{centre } \omega = \frac{b}{1 - a}, \quad z' - \omega = a(z - \omega)$$

- $|a|$ est le **rapport**, $\arg a$ l'**angle** de la similitude directe ; $a = 1$ donne une **translation**.
- $z \mapsto e^{2i\theta}\bar{z}$: **réflexion** d'axe la droite passant par O d'angle θ .
- **Inégalité triangulaire** : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$, avec égalité si et seulement si $z' = \lambda z$, $\lambda \geq 0$ (pour $z \neq 0$).
- **Identité du parallélogramme** : $|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$.

Correction de l'exercice 1 - Construire un triangle équilatéral

a) ABC est équilatéral direct si et seulement si $AC = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$, c'est-à-dire si C est l'image de B par la **rotation** de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Traduit en complexes :

$$c - a = e^{i\pi/3}(b - a)$$

b) $b - a = 2 + 2i$ et $e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$:

- $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2 + 2i) = 1 + i + \sqrt{3}i - \sqrt{3} = (1 - \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})i$.
- $c = 1 + (1 - \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})i = (2 - \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})i \approx 0,27 + 2,73i$.
- **Contrôle des longueurs** : $AB = |2 + 2i| = 2\sqrt{2}$; $AC = |c - a| = |b - a| = 2\sqrt{2}$ (rotation) ; $BC^2 = (1 + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 = 8$, donc $BC = 2\sqrt{2}$ ✓

c) On part de a). Comme $e^{i\pi/3} = -j^2$ (car $-j^2 = e^{i\pi}e^{4i\pi/3} = e^{7i\pi/3} = e^{i\pi/3}$) :

$$c - a = -j^2(b - a) \Leftrightarrow c - a + j^2b - j^2a = 0 \Leftrightarrow -a(1 + j^2) + j^2b + c = 0$$

- Or $1 + j^2 = -j$: l'égalité devient $ja + j^2b + c = 0$. En multipliant par j^2 (avec $j^3 = 1$) : $a + jb + j^2c = 0$.
- Chaque étape est une **équivalence** (on multiplie par un complexe non nul) : le critère est démontré.

- **Vérification numérique** : $a + jb + j^2c$ avec $j \approx -0,5 + 0,866i$ donne 0 à 10^{-15} près (calcul numérique) ✓
- **Piège** : pour un triangle **indirect**, le critère devient $a + j^2b + jc = 0$; l'orientation compte.

Réponse. $c = (2 - \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})i$; critère $a + jb + j^2c = 0$.

Correction de l'exercice 2 - Alignement et cocyclicité

a) Notons $u = 1 + i$, $v = 3 + 2i$, $w = 7 + 4i$. Les trois points sont alignés si et seulement si $\frac{w-u}{v-u}$ est réel :

$$\frac{w-u}{v-u} = \frac{6+3i}{2+i} = \frac{3(2+i)}{2+i} = 3$$

- Le quotient vaut 3, réel : les points sont alignés, et le troisième est même à trois fois la distance du deuxième depuis le premier.

b) $c - a = -2$ et $c - b = -1 - i$, donc $\frac{c-a}{c-b} = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{2} = 1 - i$.

- $d - a = \frac{-2+4i}{5}$ et $d - b = \frac{3-i}{5}$, donc

$$\frac{d-a}{d-b} = \frac{-2+4i}{3-i} = \frac{(-2+4i)(3+i)}{10} = \frac{-6-2i+12i-4}{10} = -1 + i.$$

c) Le rapport des deux quotients (le **birapport**) vaut

$$\frac{1-i}{-1+i} = -1 \in \mathbb{R}$$

- Les points sont distincts et non alignés trois à trois : ils sont **cocycliques**.

- Le cercle : $|a| = |b| = |c| = 1$ et $|d|^2 = \frac{9+16}{25} = 1$: c'est le **cercle unité**.

d) $\arg \frac{c-a}{c-b}$ mesure l'angle orienté $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$, et $\arg \frac{d-a}{d-b}$ l'angle $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA})$.

- Le birapport est réel si et seulement si ces deux angles sont **égaux ou supplémentaires** modulo π : c'est exactement le théorème de l'**angle inscrit** (les points C et D « voient » la corde $[AB]$ sous le même angle ou sous des angles supplémentaires).

- Ici le birapport est **négatif** : C et D sont de part et d'autre de la corde (AB) , et les angles inscrits sont supplémentaires ($\frac{\pi}{4}$ en C et $\frac{3\pi}{4}$ en D , en valeur géométrique).

Réponse. Quotient 3 : alignés ; $\frac{c-a}{c-b} = 1 - i$, $\frac{d-a}{d-b} = -1 + i$, birapport -1 : cocycliques sur le cercle unité.

Correction de l'exercice 3 - Cercle d'Apollonius

a) $MA = |z - 2|$ et $MB = |z + 1|$; la condition s'écrit $|z - 2| = 2|z + 1|$, ou, en élevant au carré (tout est positif) :

$$|z - 2|^2 = 4|z + 1|^2$$

- Avec $z = x + iy$: $(x - 2)^2 + y^2 = 4((x + 1)^2 + y^2)$.

- On développe : $x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4x^2 + 8x + 4 + 4y^2$, soit $3x^2 + 12x + 3y^2 = 0$, c'est-à-dire $x^2 + 4x + y^2 = 0$.

b) On complète le carré : $x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$, d'où

$$(x + 2)^2 + y^2 = 4$$

- Γ est le **cercle de centre** $\Omega(-2)$ **et de rayon** 2.
- **Contrôle** avec $z = 0 \in \Gamma$: $MA = 2$ et $MB = 1$, bien $MA = 2MB$ ✓ ; avec $z = -2 + 2i \in \Gamma$: $|-4 + 2i| = \sqrt{20}$ et $2|-1 + 2i| = 2\sqrt{5} = \sqrt{20}$ ✓

c) Les points réels de Γ sont $x = 0$ et $x = -4$.

- $z = 0$ est **entre** A et B : $MA = 2$, $MB = 1$ (division intérieure).
- $z = -4$ est **hors** du segment : $MA = 6$, $MB = 3$, et $6 = 2 \times 3$ (division extérieure).
- Ces deux points sont diamétralement opposés sur Γ : le centre est leur milieu, $\frac{0 + (-4)}{2} = -2$ ✓

d) Si le rapport vaut 1, la condition $|z - 2| = |z + 1|$ donne, après développement, $-4x + 4 = 2x + 1$, soit $x = \frac{1}{2}$: c'est la **médiatrice** de $[AB]$, une droite.

- **À retenir** : $\{M : MA = k MB\}$ est un cercle si $k \neq 1$ (cercle d'**Apollonius**) et la médiatrice si $k = 1$.

Réponse. Γ : cercle de centre -2 et de rayon 2 ; pour le rapport 1, la droite $x = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 4 - Quotient réel ou imaginaire pur

a) On multiplie par le conjugué du dénominateur :

$$Z = \frac{(x + i(y - 1))((x + 1) - iy)}{(x + 1)^2 + y^2}$$

- Numérateur, partie réelle : $x(x + 1) + y(y - 1) = x^2 + x + y^2 - y$.
- Numérateur, partie imaginaire : $(y - 1)(x + 1) - xy = y - x - 1$.
- Donc $\operatorname{Re} Z = \frac{x^2 + x + y^2 - y}{(x + 1)^2 + y^2}$ et $\operatorname{Im} Z = \frac{y - x - 1}{(x + 1)^2 + y^2}$.

b) Z réel $\Leftrightarrow y = x + 1$: c'est la droite (AB) (elle passe par $(0 ; 1)$ et $(-1 ; 0)$), **privée de B** où Z n'est pas défini.

- Z imaginaire pur $\Leftrightarrow x^2 + x + y^2 - y = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.
- C'est le cercle de centre $\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ (milieu de $[AB]$) et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AB}{2}$: le **cercle de diamètre** $[AB]$, privé de B .

c) $\arg Z$ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})$ (pour $M \neq A, B$).

- Z réel non nul $\Leftrightarrow$ l'angle vaut 0 ou $\pi \Leftrightarrow M, A, B$ alignés.
- Z imaginaire pur non nul $\Leftrightarrow$ l'angle est droit $\Leftrightarrow M$ est sur le cercle de diamètre $[AB]$ (théorème de Thalès du cercle).
- Le point A ($Z = 0$) appartient aux deux ensembles, selon la convention « 0 est réel et imaginaire pur ».

d) $\arg Z \equiv \frac{\pi}{2}$ demande $\operatorname{Re} Z = 0$ **et** $\operatorname{Im} Z > 0$, soit : M sur le cercle, avec $y > x + 1$.

- C'est le **demi-cercle** de diamètre $[AB]$ situé au-dessus de la droite (AB) , extrémités A et B exclues.
- **Contrôle** : le point $M = -1 + i$ est sur le cercle ($\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ✓) et au-dessus de la droite ($1 > 0$) ; $Z = \frac{-1}{i} = i$, d'argument $\frac{\pi}{2}$ ✓

Réponse. Z réel : droite (AB) privée de B ; Z imaginaire pur : cercle de diamètre $[AB]$ privé de B ; $\arg Z = \frac{\pi}{2}$: le demi-cercle au-dessus de (AB) .

Correction de l'exercice 5 - Similitude et spirale

a) s fixe Ω , donc $s(z) - i = a(z - i)$ (forme centrée). Avec $z = 1$:

$$a = \frac{(2+i)-i}{1-i} = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{2} = 1+i$$

— Puis $s(z) = (1+i)(z-i) + i = (1+i)z - i + 1 + i = (1+i)z + 1$: $a = 1+i$, $b = 1$.

— $1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$: **rapport** $\sqrt{2}$, **angle** $\frac{\pi}{4}$, centre i .

— **Contrôle** du centre par la formule $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1}{-i} = i$ ✓

b) On itère $z \mapsto (1+i)z + 1$:

— $z_1 = 2+i$; $z_2 = (1+i)(2+i) + 1 = 2+3i$;

— $z_3 = (1+i)(2+3i) + 1 = 5i$; $z_4 = (1+i)5i + 1 = -4+5i$.

— Les points tournent autour de Ω de 45° à chaque pas en s'éloignant : c'est une **spirale** (logarithmique).

c) Récurrence : $z_0 - i = 1 - i$ ✓ ; si $z_n - i = (1+i)^n(1-i)$, alors par la forme centrée

$$z_{n+1} - i = (1+i)(z_n - i) = (1+i)^{n+1}(1-i)$$

— $(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8 e^{2i\pi} = 16$, donc $z_8 = i + 16(1-i) = 16 - 15i$.

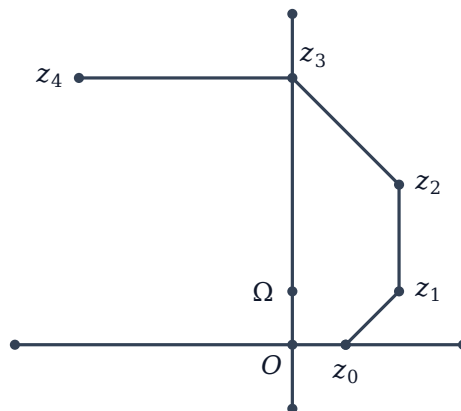
— **Contrôle** avec z_4 : $(1+i)^4 = -4$, donc $z_4 = i - 4(1-i) = -4 + 5i$ ✓

d) $\Omega M_n = |z_n - i| = (\sqrt{2})^n \sqrt{2} = (\sqrt{2})^{n+1}$: multipliée par $\sqrt{2}$ à chaque étape.

— $(\sqrt{2})^{n+1} > 1000 \Leftrightarrow (n+1)\ln\sqrt{2} > \ln 1000 \Leftrightarrow n+1 > \frac{2\ln 1000}{\ln 2} \approx 19,93$.

— Donc $n+1 \geq 20$, soit $n \geq 19$: à partir de M_{19} ($\Omega M_{19} = 2^{10} = 1024$, alors que $\Omega M_{18} = 2^{9,5} \approx 724$).

Réponse. $s(z) = (1+i)z + 1$, rapport $\sqrt{2}$, angle $\frac{\pi}{4}$; $z_4 = -4 + 5i$, $z_8 = 16 - 15i$; $\Omega M_n > 1000$ dès $n = 19$.



Les points $z_0, \dots, z_4$ s'enroulent autour de Ω .

Correction de l'exercice 6 - Composer deux rotations

a) Une rotation de centre ω et d'angle θ s'écrit $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$. Avec $e^{i\pi/2} = i$:

$$r_1(z) = iz, \quad r_2(z) = i(z-1) + 1 = iz + 1 - i$$

b) On compose : $r_2(r_1(z)) = i(iz) + 1 - i = -z + 1 - i$.

- C'est de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a = -1 = e^{i\pi}$: une rotation d'angle π , c'est-à-dire une **symétrie centrale**.
- Centre : $\omega = -\omega + 1 - i$, donc $\omega = \frac{1-i}{2}$.
- **Contrôle** : $r_1(1) = i$, puis $r_2(i) = -1 + 1 - i = -i$; et la symétrie de centre $\frac{1-i}{2}$ envoie 1 sur $2\omega - 1 = -i$ ✓

c) $r_3(z) = -i(z - 1) + 1 = -iz + 1 + i$, donc

$$r_3(r_1(z)) = -i \cdot iz + 1 + i = z + 1 + i$$

- C'est la **translation** de vecteur d'affixe $1 + i$: les angles se sont annulés.

d) Si $r_1(z) = e^{i\alpha}z + b_1$ et $r_2(z) = e^{i\beta}z + b_2$, alors $r_2 \circ r_1(z) = e^{i(\alpha+\beta)}z + (\text{constante})$.

- Si $\alpha + \beta \not\equiv 0 [2\pi]$: c'est une **rotation d'angle** $\alpha + \beta$ (elle a un unique point fixe).
- Si $\alpha + \beta \equiv 0 [2\pi]$: c'est une **translation** (éventuellement l'identité).
- **Piège** : le centre de la composée n'est ni O ni A en général ; il faut le calculer comme point fixe.

Réponse. $r_2 \circ r_1(z) = -z + 1 - i$: symétrie de centre $\frac{1-i}{2}$; $r_3 \circ r_1(z) = z + 1 + i$: translation.

Correction de l'exercice 7 - Réflexions et rotations

a) Un point de Δ_θ s'écrit $z = te^{i\theta}$ avec $t \in \mathbb{R}$, donc $\bar{z} = te^{-i\theta}$ et

$$\sigma_\theta(z) = e^{2i\theta}te^{-i\theta} = te^{i\theta} = z$$

- Involution : $\sigma_\theta(\sigma_\theta(z)) = e^{2i\theta}\overline{e^{2i\theta}z} = e^{2i\theta}e^{-2i\theta}z = z$.

b) Posons $z' = \sigma_\theta(z)$ et $u = e^{i\theta}$ ($|u| = 1$, $\bar{u} = u^{-1}$), donc $z' = u^2\bar{z}$.

- **Milieu** : $m = \frac{z + u^2\bar{z}}{2} = u \frac{\bar{u}z + u\bar{z}}{2} = u\text{Re}(\bar{u}z)$: un réel fois u , donc $m \in \Delta_\theta$.
- **Orthogonalité** : $\frac{z' - z}{u} = u\bar{z} - \bar{u}z = \overline{u\bar{z}} - \bar{u}z = -2i\text{Im}(\bar{u}z)$, imaginaire pur. Donc le vecteur $\overline{MM'}$ est orthogonal à la direction u .
- Δ_θ est donc la **médiatrice** de $[MM']$: σ_θ est la réflexion d'axe Δ_θ .

c) On compose : $\sigma_\beta(\sigma_\alpha(z)) = e^{2i\beta}\overline{e^{2i\alpha}z} = e^{2i\beta}e^{-2i\alpha}z$.

$$\sigma_\beta \circ \sigma_\alpha(z) = e^{2i(\beta-\alpha)}z$$

- C'est la **rotation de centre** O **et d'angle** $2(\beta - \alpha)$: deux fois l'angle entre les axes. L'ordre compte (on obtient l'angle opposé en échangeant).

d) La droite $y = x$ a pour angle $\theta = \frac{\pi}{4}$ et $e^{2i\pi/4} = i$: la réflexion est $z \mapsto i\bar{z}$.

- Image de $3 + i$: $i(3 - i) = 3i + 1 = 1 + 3i$: on a bien **échangé** abscisse et ordonnée ✓
- **Remarque** : une réflexion **renverse** l'orientation (le conjugué $\bar{z}$ apparaît), une rotation la conserve.

Réponse. σ_θ : réflexion d'axe Δ_θ ; $\sigma_\beta \circ \sigma_\alpha$: rotation de centre O d'angle $2(\beta - \alpha)$; réflexion d'axe $y = x$: $z \mapsto i\bar{z}$, image $1 + 3i$.

Correction de l'exercice 8 - Théorème de la médiane

a) On utilise $|w|^2 = w\bar{w}$ et on développe :

$$|u + v|^2 = |u|^2 + u\bar{v} + \bar{u}v + |v|^2, \quad |u - v|^2 = |u|^2 - u\bar{v} - \bar{u}v + |v|^2$$

- En additionnant, les termes croisés s'éliminent : $|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2$.
- **Interprétation** : dans un parallélogramme construit sur les vecteurs u et v , la somme des carrés des **diagonales** égale la somme des carrés des **quatre côtés**.

b) On prend l'origine en A : $u = b - a$ et $v = c - a$. Alors $u + v = 2(i - a)$ où $i = \frac{b+c}{2}$, et $u - v = b - c$.

- L'identité donne $4AI^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2)$, soit, en divisant par 2 :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

c) $AB^2 = 16$, $AC^2 = 1 + 9 = 10$, $BC^2 = |-3 + 3i|^2 = 18$ et $I = \frac{5+3i}{2}$, donc $AI^2 = \frac{25+9}{4} = \frac{17}{2}$.

- Gauche : $16 + 10 = 26$; droite : $2 \times \frac{17}{2} + \frac{18}{2} = 17 + 9 = 26$ ✓

d) On isole AI dans le théorème : $2AI^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2} = 25 + 49 - 32 = 42$.

- Donc $AI^2 = 21$ et $AI = \sqrt{21} \approx 4,58$.
- **Vraisemblance** : la médiane issue de A est plus courte que le plus long des deux côtés AB , AC qui l'encadrent ($4,58 < 7$) et plus longue que la moitié de leur différence ✓
- **Méthode** : les longueurs au carré se manipulent par $|w|^2 = w\bar{w}$, exactement comme un produit scalaire.

Réponse. $|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$; $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$; vérification $26 = 26$; médiane $\sqrt{21}$.

Correction de l'exercice 9 - Cas d'égalité triangulaire

- a)** Si $z' = \lambda z$ avec $\lambda \geq 0$: $|z + z'| = (1 + \lambda)|z| = |z| + \lambda|z| = |z| + |z'|$.
- Réciproquement, on élève au carré (tout est positif) : $|z + z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{z}z')$ et $(|z| + |z'|)^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'|$.
 - L'égalité donne $\operatorname{Re}(\bar{z}z') = |\bar{z}z'|$: le complexe $w = \bar{z}z'$ a une partie réelle égale à son module, donc $\operatorname{Im} w = 0$ et $w \geq 0$ (car $|w|^2 = (\operatorname{Re} w)^2 + (\operatorname{Im} w)^2$).
 - Alors $z' = \frac{w}{\bar{z}} = \frac{wz}{|z|^2} = \lambda z$ avec $\lambda = \frac{w}{|z|^2} \geq 0$.

b) Pour tout M , l'inégalité triangulaire donne $MA + MB \geq AB = |1 - i| = \sqrt{2}$.

$$MA + MB = AB \Leftrightarrow |(z - 1)| + |(i - z)| = |(z - 1) + (i - z)|$$

- Par a) (si $z \neq 1$), c'est $i - z = \lambda(z - 1)$ avec $\lambda \geq 0$: les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont de **même sens**, donc $M \in [AB]$. Le cas $z = 1$ ($M = A$) convient aussi.
- **Ensemble** : le **segment** $[AB]$ (et non la droite entière).

c) Si $|z| \leq 1$ et $|z - 2| \leq 1$, alors $2 = |z + (2 - z)| \leq |z| + |2 - z| \leq 2$.

- Toutes les inégalités sont des **égalités** : $|z| = 1$, $|2 - z| = 1$ et, par a), $2 - z = \lambda z$ avec $\lambda \geq 0$, donc z est un réel positif.
- Un réel positif de module 1 : $z = 1$. **Vérification** : $|1| = 1$ et $|1 - 2| = 1$ ✓
- **Géométrie** : les deux disques fermés sont **tangents extérieurement** en 1 ; leur intersection est réduite à ce point.

Réponse. Égalité $\Leftrightarrow z' = \lambda z$, $\lambda \geq 0$; b) le segment $[AB]$; c) $z = 1$.

Correction de l'exercice 10 - Orthocentre et droite d'Euler

a) Un complexe w est imaginaire pur si et seulement si $\bar{w} = -w$. Comme $|b| = |c| = 1$, $\bar{b} = \frac{1}{b}$ et $\bar{c} = \frac{1}{c}$:

$$\overline{\left(\frac{b+c}{b-c}\right)} = \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{c}} = \frac{c+b}{c-b} = -\frac{b+c}{b-c}$$

— (On a multiplié numérateur et dénominateur par bc .) Le quotient est donc imaginaire pur.

b) $h - a = b + c$, donc $\frac{h-a}{c-b}$ est imaginaire pur par a) : si $H \neq A$, $(AH) \perp (BC)$.

— Par symétrie des rôles, $(BH) \perp (AC)$ et $(CH) \perp (AB)$: H est sur les trois hauteurs, c'est l'**orthocentre**.

— Si $H = A$, alors $b + c = 0$: $[BC]$ est un diamètre, le triangle est rectangle en A , dont l'orthocentre est bien A ✓

c) Le centre de gravité a pour affixe $g = \frac{a+b+c}{3} = \frac{h}{3}$, donc $h = 3g$:

$$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$$

— O (centre du cercle circonscrit), G et H sont **alignés** : c'est la droite d'Euler (si le triangle n'est pas équilatéral ; sinon $O = G = H$).

d) $h = 1 - 0,6 + 0,8i - i = 0,4 - 0,2i$.

— $h - a = -0,6 - 0,2i$ et $b - c = -0,6 + 1,8i$. On calcule le quotient :

— $\frac{(-0,6 - 0,2i)(-0,6 - 1,8i)}{0,36 + 3,24} = \frac{0,36 + 1,08i + 0,12i - 0,36}{3,6} = \frac{1,2i}{3,6} = \frac{i}{3}$: imaginaire pur ✓

— De même $\frac{h-b}{a-c} = -i$ et $\frac{h-c}{a-b} = \frac{i}{2}$ (calculs analogues) : les trois hauteurs passent par H ✓

— **Piège** : la formule $h = a + b + c$ suppose l'origine au **centre du cercle circonscrit** ; ailleurs elle est fautive.

Réponse. $H(a + b + c)$ est l'orthocentre ; $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$; en d) $h = 0,4 - 0,2i$.

Correction de l'exercice 11 - Inversion d'une droite

a) On multiplie par le conjugué :

$$w = \frac{1}{1+iy} = \frac{1-iy}{1+y^2} = \frac{1}{1+y^2} - \frac{y}{1+y^2}i$$

b) On réduit au même dénominateur :

— $w - \frac{1}{2} = \frac{2(1-iy) - (1+y^2)}{2(1+y^2)} = \frac{1-y^2-2iy}{2(1+y^2)} = \frac{(1-iy)^2}{2(1+y^2)}$.

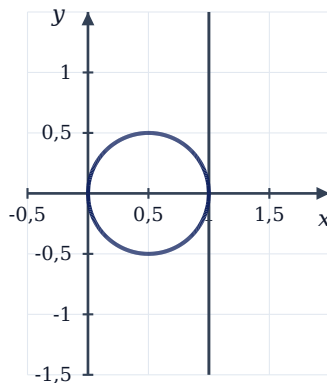
— Or $|1-iy|^2 = 1+y^2$, donc $\left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1+y^2}{2(1+y^2)} = \frac{1}{2}$ ✓

c) Soit $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$. On pose $z = \frac{1}{w}$ et on vérifie que $\operatorname{Re} z = 1$:

— $\left|w - \frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow |w|^2 - \operatorname{Re} w = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} w = |w|^2$.

— Alors $\operatorname{Re} \frac{1}{w} = \operatorname{Re} \frac{\bar{w}}{|w|^2} = \frac{\operatorname{Re} w}{|w|^2} = 1$: $z \in D$ et $f(z) = w$.

- 0 n'est pas atteint car $\frac{1}{z} \neq 0$; il correspond au « point à l'infini » de la droite ($|y| \rightarrow +\infty$ donne $w \rightarrow 0$).
 - **Bilan** : $f(D) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
 - d)** $\operatorname{Re} z > 1$ et $w = \frac{1}{z}$: $\operatorname{Re} z = \frac{\operatorname{Re} w}{|w|^2} > 1 \Leftrightarrow |w|^2 < \operatorname{Re} w \Leftrightarrow \left|w - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$.
 - L'image du demi-plan est le **disque ouvert** de centre $\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.
 - **Principe général** : $z \mapsto \frac{1}{z}$ transforme les droites et cercles en droites ou cercles ; une droite ne passant pas par O devient un cercle passant par O .
- Réponse.** $f(D)$ est le cercle de centre $\frac{1}{2}$, rayon $\frac{1}{2}$, privé de 0 ; le demi-plan $\operatorname{Re} z > 1$ a pour image le disque ouvert correspondant.



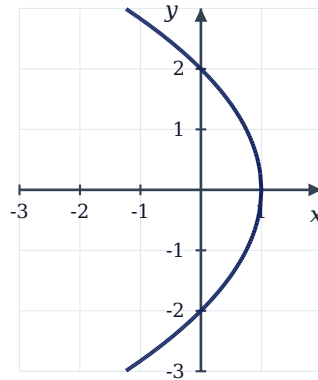
La droite D et son image, le cercle de centre $\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé de O .

Correction de l'exercice 12 - Image d'une droite par le carré

- a)** $g(1 + iy) = 1 + 2iy + (iy)^2 = (1 - y^2) + 2yi$, donc
- $$u = 1 - y^2, \quad v = 2y$$
- b)** De $v = 2y$ on tire $y = \frac{v}{2}$, puis $u = 1 - \frac{v^2}{4}$.
- Réciproquement, tout point $(u; v)$ de P est l'image de $1 + i\frac{v}{2}$: l'image est **toute** la parabole.
 - P a pour sommet $(1; 0)$ (image de $z = 1$), est tournée vers les u négatifs et coupe l'axe imaginaire en $\pm 2i$ (images de $1 \pm i$: $(1 \pm i)^2 = \pm 2i$ ✓).
- c)** Sur D : $g(1 + iy) = g(1 + iy')$ donne $v = 2y = 2y'$, donc $y = y'$: g est **injective** sur D .
- Sur $\mathbb{C}$, non : $g(-z) = g(z)$. Par exemple $g(1) = g(-1) = 1$. La droite $\operatorname{Re} z = -1$ a la **même** image P .
- d)** $z = x + i$: $g(z) = x^2 - 1 + 2xi$, donc $u = x^2 - 1$ et $v = 2x$.
- On élimine x : $u = \frac{v^2}{4} - 1$, parabole de sommet $(-1; 0)$ tournée vers les u positifs.
 - **Remarque** : les deux paraboles se coupent à angle droit en $\pm 2i$, comme les droites $\operatorname{Re} z = 1$ et $\operatorname{Im} z = 1$ se coupent à angle droit en $1 + i$: $z \mapsto z^2$ **conserve les angles** hors

de 0 (application conforme).

Réponse. $u = 1 - y^2$, $v = 2y$; image : la parabole $u = 1 - \frac{v^2}{4}$; g injective sur D , pas sur $\mathbb{C}$; image de $\text{Im } z = 1$: $u = \frac{v^2}{4} - 1$.



La parabole $u = 1 - \frac{v^2}{4}$ (axe horizontal : u , axe vertical : v).

Correction de l'exercice 13 - Distances extrémales à un cercle

a) $|z_0| = \sqrt{9 + 16} = 5$ et $|z| = 1$. L'inégalité triangulaire et sa **version renversée** donnent :

$$||z_0| - |z|| \leq |z - z_0| \leq |z_0| + |z|$$

— D'où $|5 - 1| = 4 \leq |z - z_0| \leq 5 + 1 = 6$.

— (La version renversée vient de $|z_0| = |z_0 - z + z| \leq |z_0 - z| + |z|$.)

b) Le **maximum** 6 est atteint quand $|z + (-z_0)| = |z| + |z_0|$, c'est-à-dire (cas d'égalité) quand z et $-z_0$ sont de même direction et même sens : $z = -\frac{z_0}{|z_0|} = -\frac{3+4i}{5}$.

— **Contrôle** : $\left| -\frac{3+4i}{5} - 3-4i \right| = \frac{6}{5}|3+4i| = 6 \checkmark$

— Le **minimum** 4 est atteint pour $z = \frac{z_0}{|z_0|} = \frac{3+4i}{5}$: $\left| \frac{3+4i}{5} - (3+4i) \right| = \frac{4}{5} \times 5 = 4 \checkmark$

— **Géométrie** : les deux points extrêmes sont sur la droite (Oz_0) , du même côté que z_0 pour le minimum, à l'opposé pour le maximum.

c) Même raisonnement : pour $|z| = r$, $||z_0| - r| \leq |z - z_0| \leq |z_0| + r$, bornes atteintes en $z = \pm r \frac{z_0}{|z_0|}$ (si $z_0 \neq 0$).

d) $r = 7\,000$ et $|z_0| = 6\,400$ (dans un plan contenant l'orbite et la station) :

— distance minimale $7\,000 - 6\,400 = 600$ km (satellite à la verticale) ;

— distance maximale $7\,000 + 6\,400 = 13\,400$ km (satellite à l'opposé ; il est alors caché par la Terre).

— **Piège** : sans valeur absolue, la borne inférieure $|z_0| - r$ serait négative quand $r > |z_0|$; c'est $||z_0| - r|$ qu'il faut écrire.

Réponse. $4 \leq |z - z_0| \leq 6$; minimum en $\frac{3+4i}{5}$, maximum en $-\frac{3+4i}{5}$; satellite : 600 km et 13 400 km.

Correction de l'exercice 14 - Carrés extérieurs d'un triangle

a) Q est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ (le carré est construit du côté **opposé** à B , c'est-à-dire dans le sens indirect depuis $\overrightarrow{OA}$) : $q = e^{-i\pi/2}a = -ia$.

— S est l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{2}$ (côté opposé à A) : $s = ib$.

b) On calcule le second membre :

$$i(s - a) = i(ib - a) = -b - ia = q - b$$

c) $q - b$ est l'afixe de $\overrightarrow{BQ}$, et $s - a$ celle de $\overrightarrow{AS}$. L'égalité $\overrightarrow{BQ} = i\overrightarrow{AS}$ (en affixes) signifie que $\overrightarrow{BQ}$ est l'image de $\overrightarrow{AS}$ par la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$:

— **même longueur** : $BQ = |q - b| = |i||s - a| = AS$;

— **perpendiculaires** : $\frac{q - b}{s - a} = i$ est imaginaire pur.

d) $s = i(1 + 2i) = -2 + i$ et $q = -3i$.

— $s - a = -5 + i$, $AS = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$; $q - b = -1 - 5i$, $BQ = \sqrt{26}$ ✓

— $i(-5 + i) = -5i - 1 = q - b$ ✓

— **Leçon** : un résultat de géométrie qui semble exiger une figure astucieuse (théorème de **Vecten**) devient une ligne de calcul dès qu'on nomme les rotations.

Réponse. $q - b = i(s - a)$: $AS = BQ$ et $(AS) \perp (BQ)$; en d) $AS = BQ = \sqrt{26}$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : aires et polygones réguliers

a) Posons $u = b - a = u_1 + iu_2$ et $v = c - a = v_1 + iv_2$. L'aire du triangle vaut la moitié de celle du parallélogramme construit sur u et v , soit $\frac{1}{2}|u_1v_2 - u_2v_1|$ (déterminant). Or

$$\overline{u}v = (u_1 - iu_2)(v_1 + iv_2) = (u_1v_1 + u_2v_2) + i(u_1v_2 - u_2v_1)$$

— Donc $\text{Im}(\overline{u}v) = u_1v_2 - u_2v_1$ et l'aire vaut $\frac{1}{2}|\text{Im}(\overline{u}v)|$.

— Bonus : $\text{Re}(\overline{u}v)$ est le **produit scalaire** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

b) $u = 3 + i$, $v = 1 + 5i$, $\overline{u}v = (3 - i)(1 + 5i) = 3 + 15i - i + 5 = 8 + 14i$.

— Aire = $\frac{1}{2} \times 14 = 7$.

c) P_n se découpe en n triangles isométriques $O\omega^k\omega^{k+1}$. Pour $k = 0$, avec a) et $a = 0$:

$$A(O, 1, \omega) = \frac{1}{2}\text{Im}(\overline{1} \cdot \omega) = \frac{1}{2}\sin \frac{2\pi}{n}$$

— Aire totale : $\frac{n}{2}\sin \frac{2\pi}{n}$.

— Un côté mesure $|\omega - 1| = 2\sin \frac{\pi}{n}$ (angle moitié : $|e^{i\alpha} - 1| = 2\left|\sin \frac{\alpha}{2}\right|$), d'où le périmètre $2n\sin \frac{\pi}{n}$.

d) Valeurs :

n	Aire	Périmètre
3	$\frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1,299$	$3\sqrt{3} \approx 5,196$
4	2	$4\sqrt{2} \approx 5,657$
6	$\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,598$	6

— Limites : avec $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ en 0, $\frac{n}{2}\sin \frac{2\pi}{n} = \pi \cdot \frac{\sin(2\pi/n)}{2\pi/n} \rightarrow \pi$ et $2n\sin \frac{\pi}{n} \rightarrow 2\pi$.

— **Interprétation** : les polygones inscrits approchent le disque unité ; on retrouve son aire π et son périmètre 2π . C'est la méthode d'**Archimède** (qui allait jusqu'à $n = 96$). Pour $n = 100$: aire $\approx 3,1395$.

Réponse. Aire $\frac{1}{2}|\operatorname{Im}(\overline{(b-a)}(c-a))|$; en b) 7 ; P_n : aire $\frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n} \rightarrow \pi$, périmètre $2n \sin \frac{\pi}{n} \rightarrow 2\pi$.